IN 101 - Cours 12

9 décembre 2011

présenté par

Matthieu Finiasz

Rappel des complexités

Recherche en table vs. ABR

méthode	stockage	recherche	insertion	modif.	suppr.
adressage direct	$\Theta(m)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
recherche séquentielle	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
recherche dichotomique	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
tables de hachage	$\Theta(k+n)$	$\Theta(\frac{n}{k})$	$\Theta(1)$	$\Theta(\frac{n}{k})$	$\Theta(\frac{n}{k})$
avec $k \simeq n$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
ABR	$\Theta(n)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$	$\Theta(h)$

- On aimerait garantir la complexité des ABR dans le pire cas
  - il faut des arbres tels que $h = \Theta(\log n)$ dans tous les cas.

Un problème concret
Indexation de bases de données

- Une base de donnée peut se voir comme une grande table avec plusieurs colonnes :

Nom	Prénom	Promo	Filière	Prépa	Téléphone	Sexe	Naissance	login
AMALRIC	Marie	2013	CC_MP	Paris : Lycée Louis-le-Grand	0675xxxx09	F	23/07/1989	amalric
BALZER	Anne-Sophie	2013	CC_MP	Toulouse : Lycée Bellevue	0645xxxx68	F	30/06/1990	balzer
BARHOUMI	Rania	2013	CC_MP	Tunisie : IPEST	0640xxxx30	F	10/07/1989	barhoumi
BASSIR KAZERUNI	Neda	2013	CC_PSI	Paris : Lycée Louis-le-Grand	0619xxxx65	F	31/05/1990	bassir
BENABDELJELIL	Kelthoum	2013	CC_MP		0636xxxx75	F	08/06/1990	benabdeljelil
DZIEDZIC	Amandine	2013	CC_PSI	Grenoble : Lycée Champollion	0670xxxx10	F	13/01/1989	dziedzic
FERON	Amélie	2013	CC_PC	Lycée Faidherbe, Lille	0678xxxx21	F	17/01/1990	feron
GARCIA	Maylis	2013	CC_PSI	Nantes : Lycée Clemenceau	0671xxxx16	F	22/09/1990	mgarcia
HEBERT	Odile	2013	CC_PC	Lyon : Lycée du Parc	0662xxxx97	F	16/06/1989	hebert
LEDUCQ	Camille	2013	CC_MP	Paris : Lycée Stanislas	0621xxxx59	F	10/12/1990	leducq
MADELENAT	Jill	2013	CC_PSI	Marseille : Lycée Thiers	0679xxxx69	F	10/11/1990	madelenat
MENISSIER	Laure	2013	CC_PSI	Lyon : Lycée du Parc	0673xxxx45	F	26/08/1990	menissier
PELLETIER	Fanny	2013	CC_PC	Grenoble : Lycée Champollion	0677xxxx77	F	06/12/1991	fpelletier
PESUDO	Laure	2013	CC_PC	Toulouse : Lycée de Fermat	0626xxxx91	F	27/11/1989	pesudo
PETITET	Marie	2013	CC_PSI	Lyon : Lycée du Parc	0680xxxx43	F	23/01/1989	petitet
PORE	Anne-Sophie	2013	CC_PSI	Paris : Lycée Saint-Louis	0631xxxx77	F	31/12/1990	pore
PUREN	Lucie	2013	CC_MP		0683xxxx14	F	16/05/1990	puren
REGNAUT	Anne-Charlotte	2013	CC_PSI	Lyon : Lycée du Parc	0643xxxx76	F	16/05/1991	regnaut
SOURDIN	Charlotte	2013	CC_MP		0679xxxx33	F	23/08/1989	sourdin
ZAIEM	Yasmine	2013	CC_MP	Paris : Lycée Louis-le-Grand	0667xxxx68	F	28/04/1989	zaiem

- Par rapport à un dictionnaire, on veut faire des recherches sur différentes clefs :
  → Nom, prénom, date de naissance...

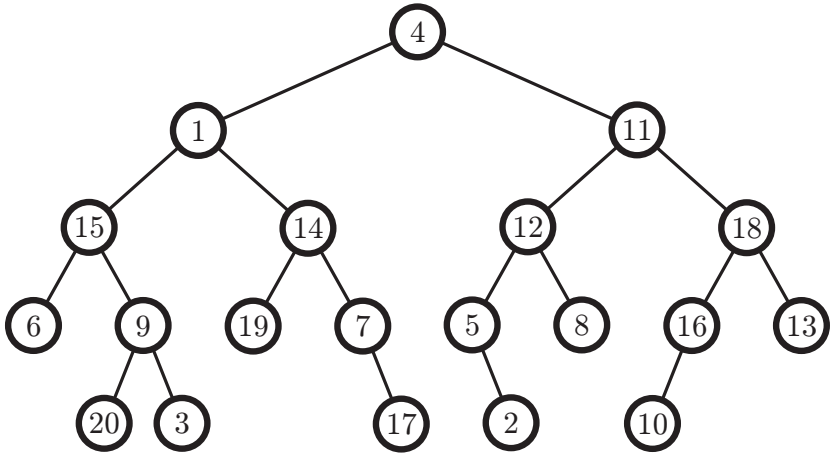
Un problème concret

Indexation de bases de données

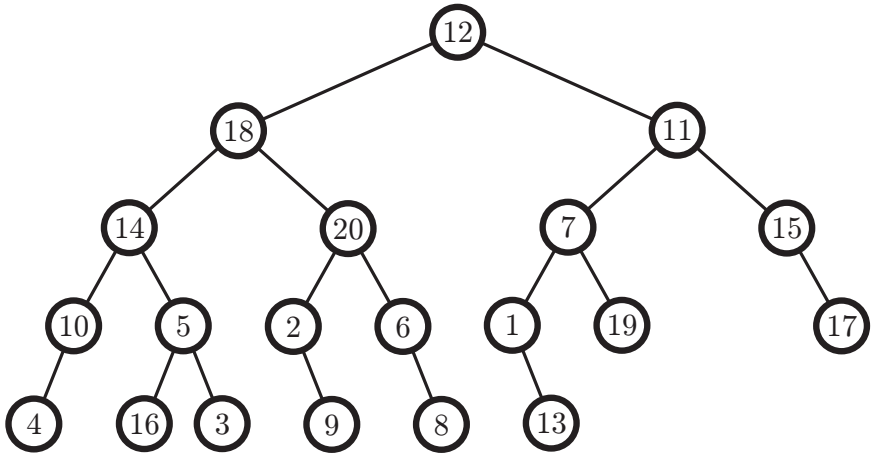
- On attribue à chaque ligne un identifiant unique : la clef primaire
  - pour chaque colonne on construit un index
    - → un ABR équilibré triant les clefs primaires.

Clef	Nom	Prénom	Promo	Filière	Prépa	Téléphone	Sexe	Naissance	login
1	AMALRIC	Marie	2013	CC_MP	Paris : Lycée Louis-le-Grand	0675xxxx09	F	23/07/1989	amalric
2	BALZER	Anne-Sophie	2013	CC_MP	Toulouse : Lycée Bellevue	0645xxxx68	F	30/06/1990	balzer
3	BARHOUMI	Rania	2013	CC_MP	Tunisie : IPEST	0640xxxx30	F	10/07/1989	barhoumi
4	BASSIR KAZERUNI	Neda	2013	CC_PSI	Paris : Lycée Louis-le-Grand	0619xxxx65	F	31/05/1990	bassir
5	BENABDELJELIL	Kelthoum	2013	CC_MP		0636xxxx75	F	08/06/1990	benabdeljelil
6	DZIEDZIC	Amandine	2013	CC_PSI	Grenoble : Lycée Champollion	0670xxxx10	F	13/01/1989	dziedzic

Date de naissance



Téléphone



Le tas

Un premier exemple d'arbre équilibré

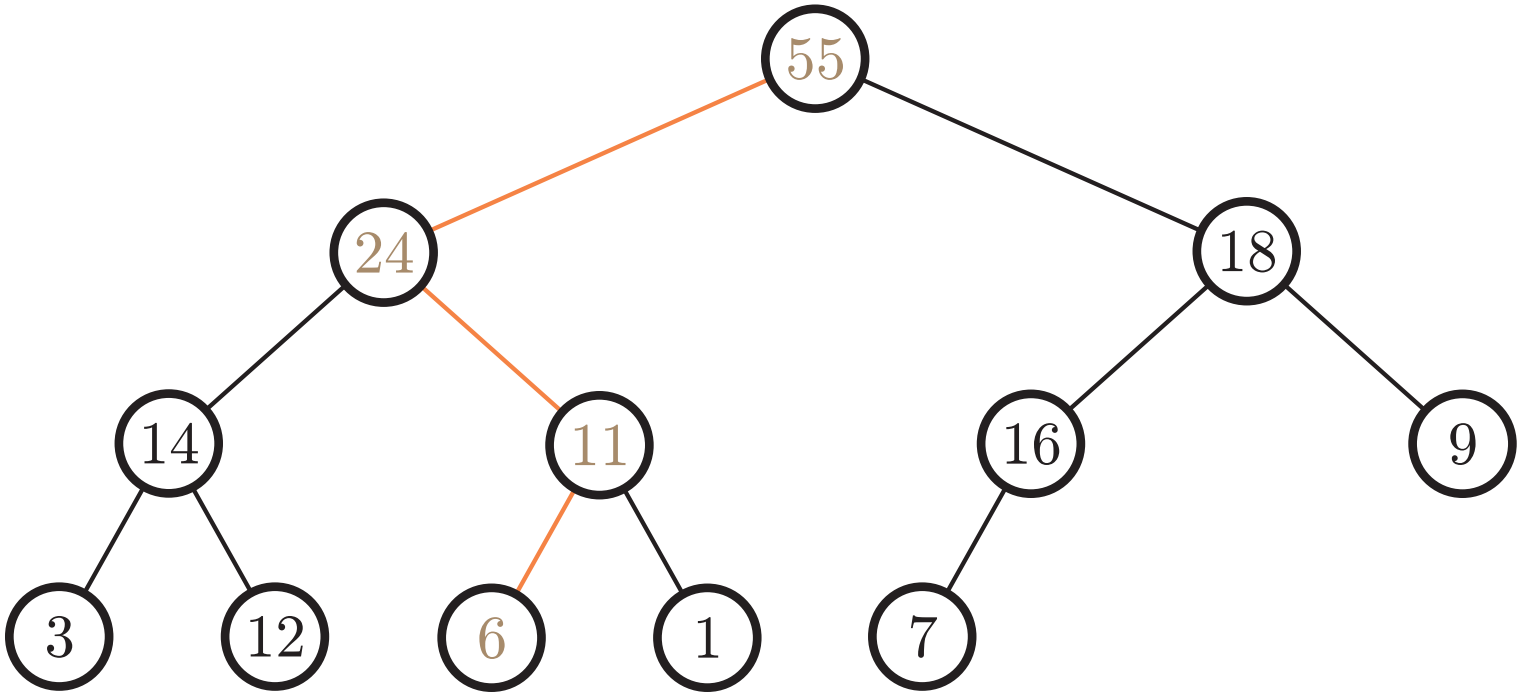
Définition

- Un tas est un arbre binaire ordonné, mais pas un ABR.
  - C'est un arbre binaire complet :
    - → tous les niveaux (sauf le dernier) sont remplis,
    - → sur le dernier, tous les nœuds sont à gauche.
  - La clef d'un nœud est supérieure aux clefs de tous ses descendants
    - → la clef la plus grande est à la racine.

- Permet de gérer une file de priorité :
  - chaque élément a une priorité (sa clef)
  - on veut pouvoir efficacement :
    - insérer un élément,
    - rechercher l'élément de priorité maximale → la racine,
    - supprimer l'élément de priorité maximale.

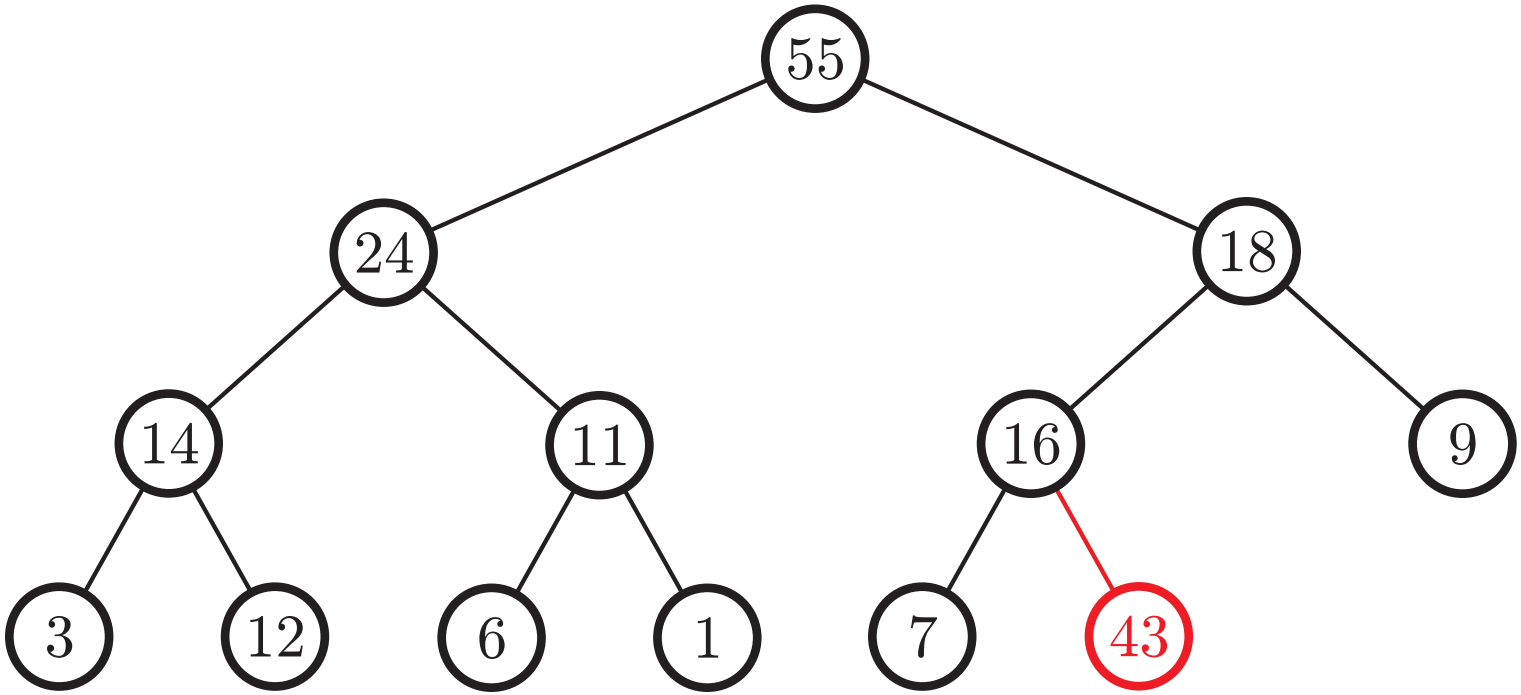
Exemple de tas

- Les clefs sont en ordre décroissant au sein d'une même branche
  - aucune relation entre des nœuds de branches différentes.
- Les nœuds sont tassés à gauche.



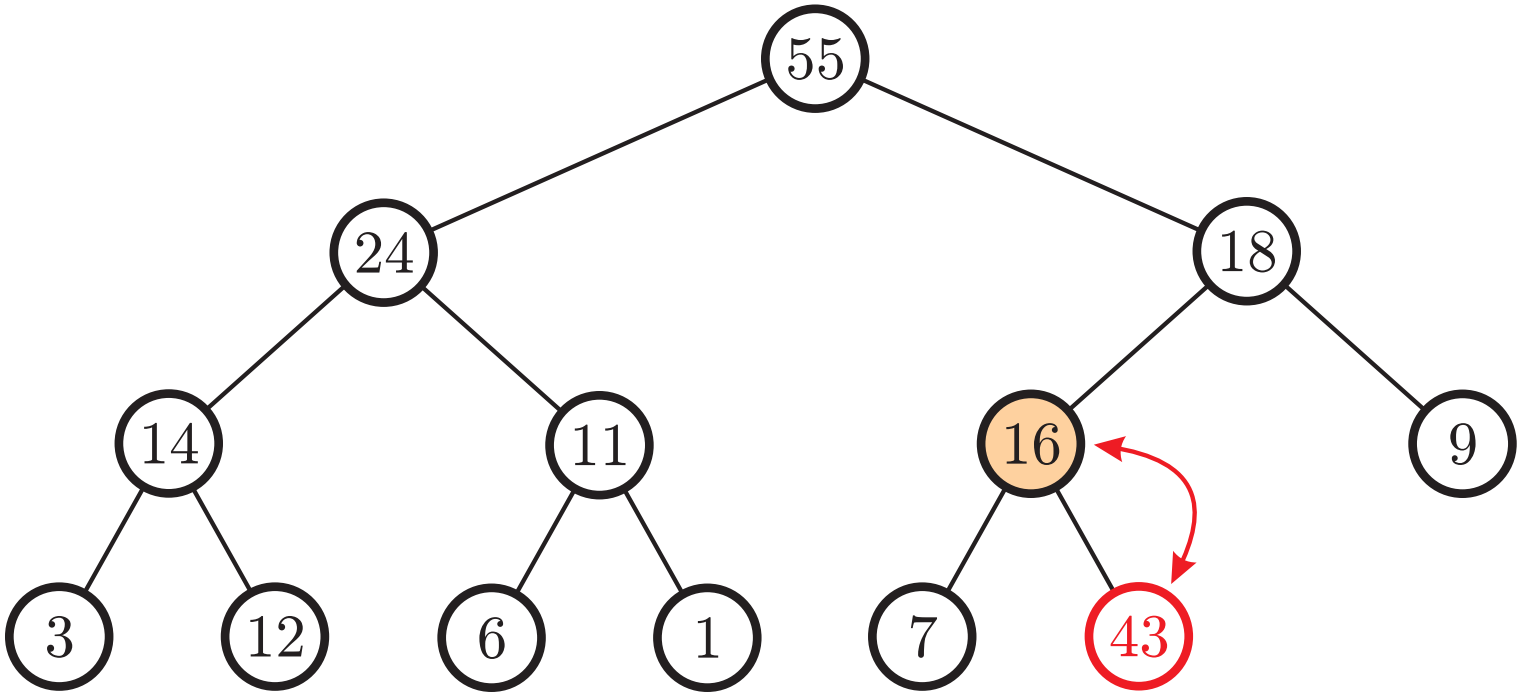
Insertion d'un élément

- Il faut conserver les deux propriétés du tas :
  - la complétude,
  - l'ordre des clefs.
- On insère à la première place libre.



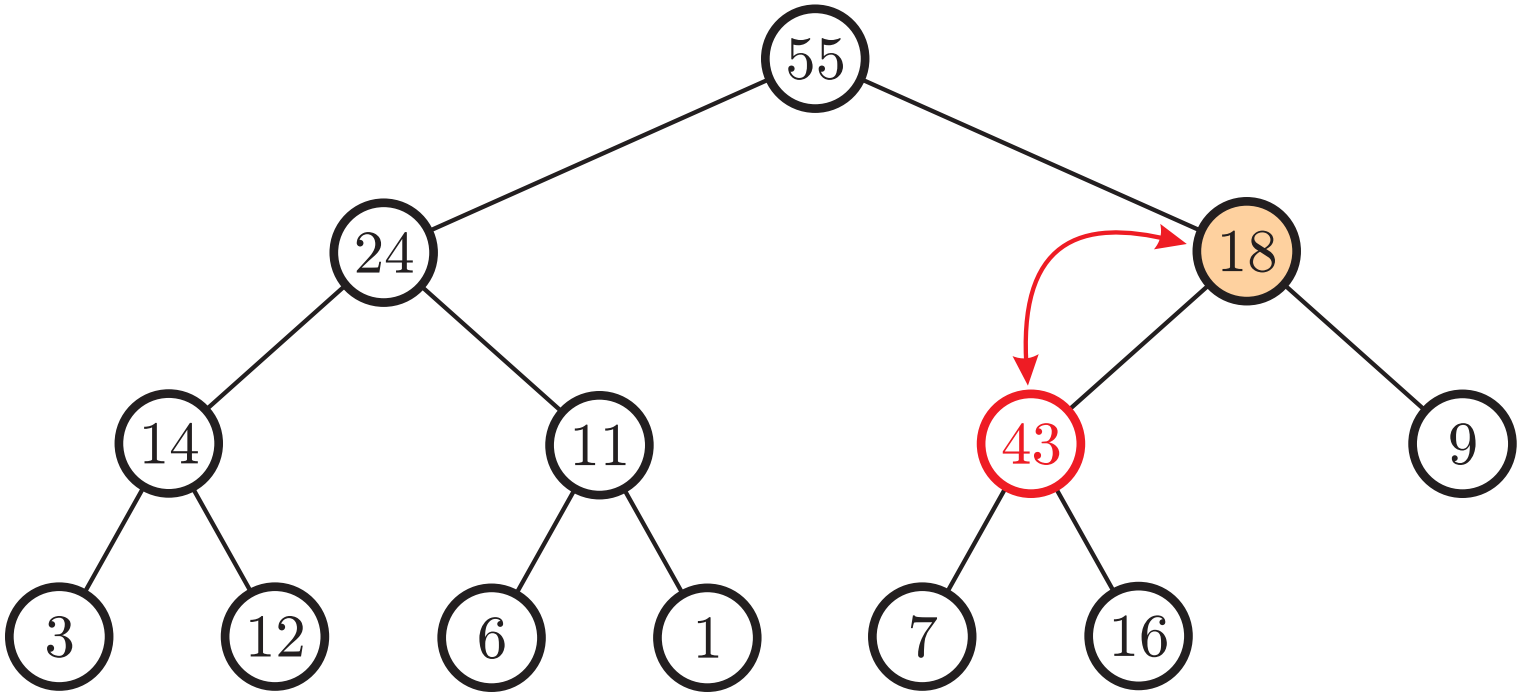
Insertion d'un élément

- Il faut conserver les deux propriétés du tas :
  - la complétude,
  - l'ordre des clefs.
- On fait remonter le nœud.



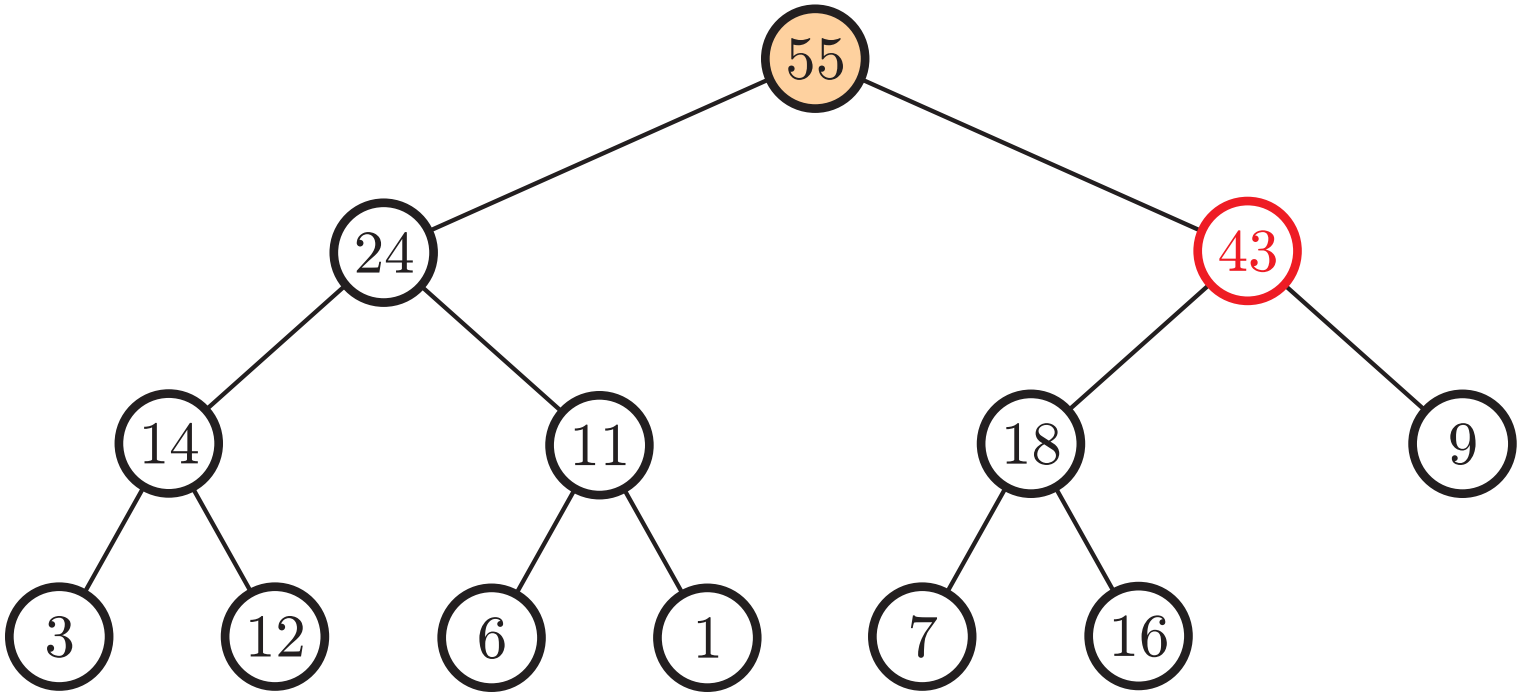
Insertion d'un élément

- Il faut conserver les deux propriétés du tas :
  - la complétude,
  - l'ordre des clefs.
- On fait remonter le nœud.



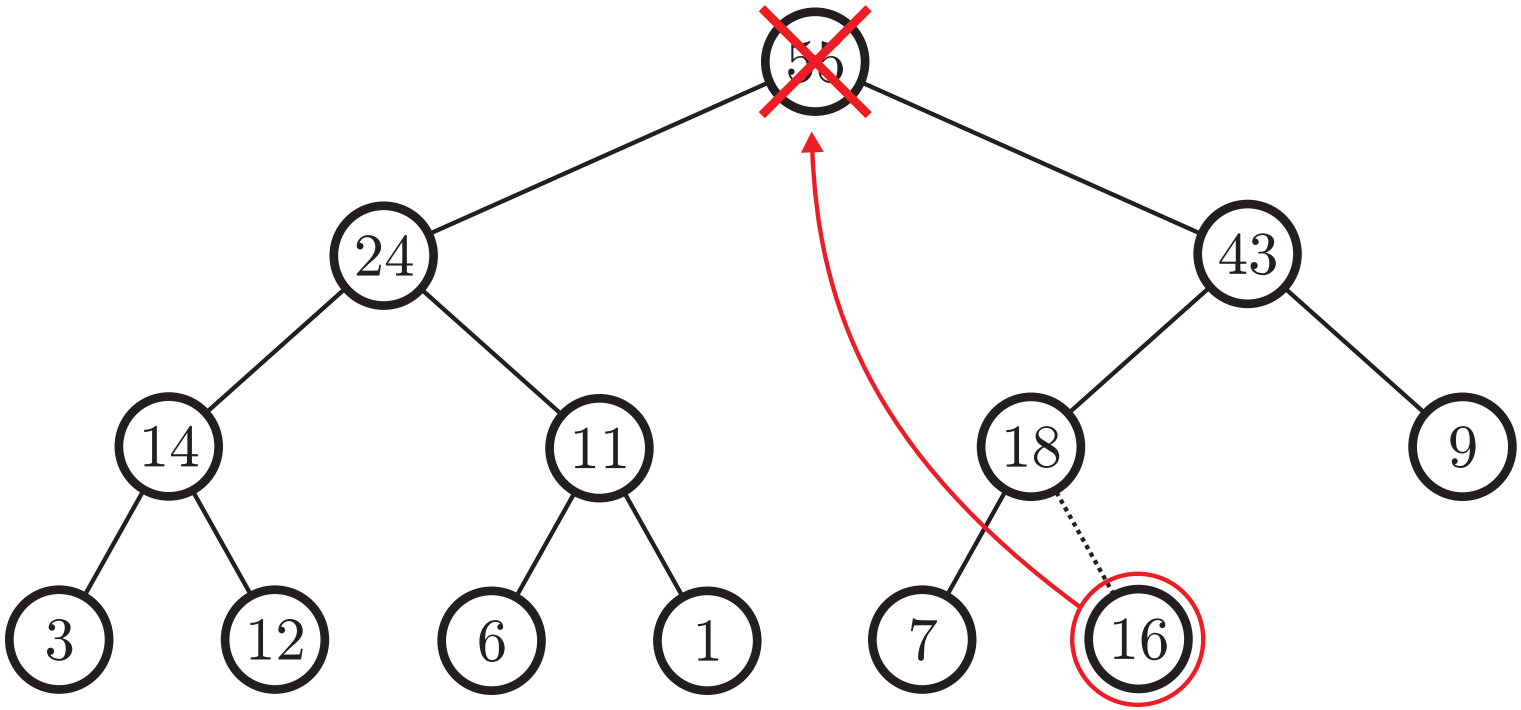
Insertion d'un élément

- Il faut conserver les deux propriétés du tas :
  - la complétude,
  - l'ordre des clefs.
- On fait remonter le nœud → jusqu'à ce que l'ordre soit bon.



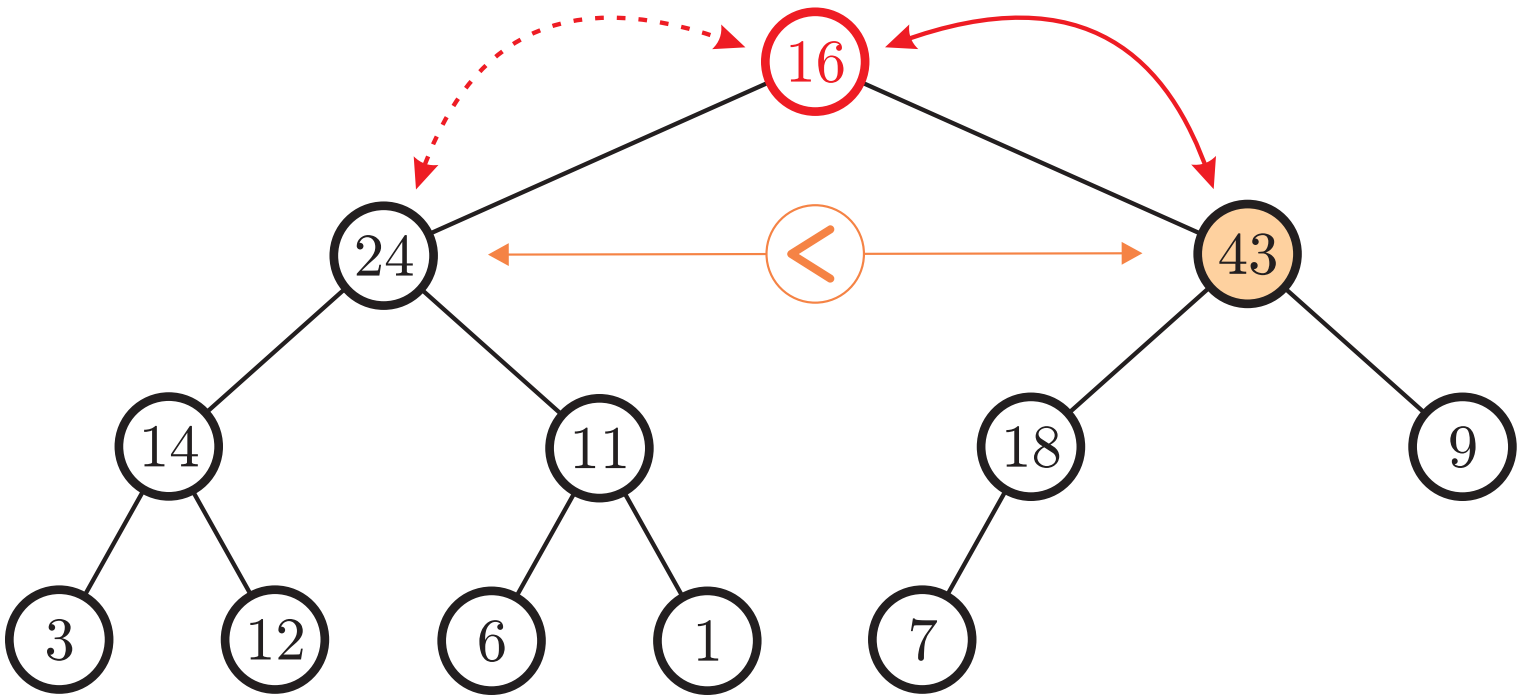
Suppression de la racine

- On supprime toujours la racine :
  - conserver un arbre complet.



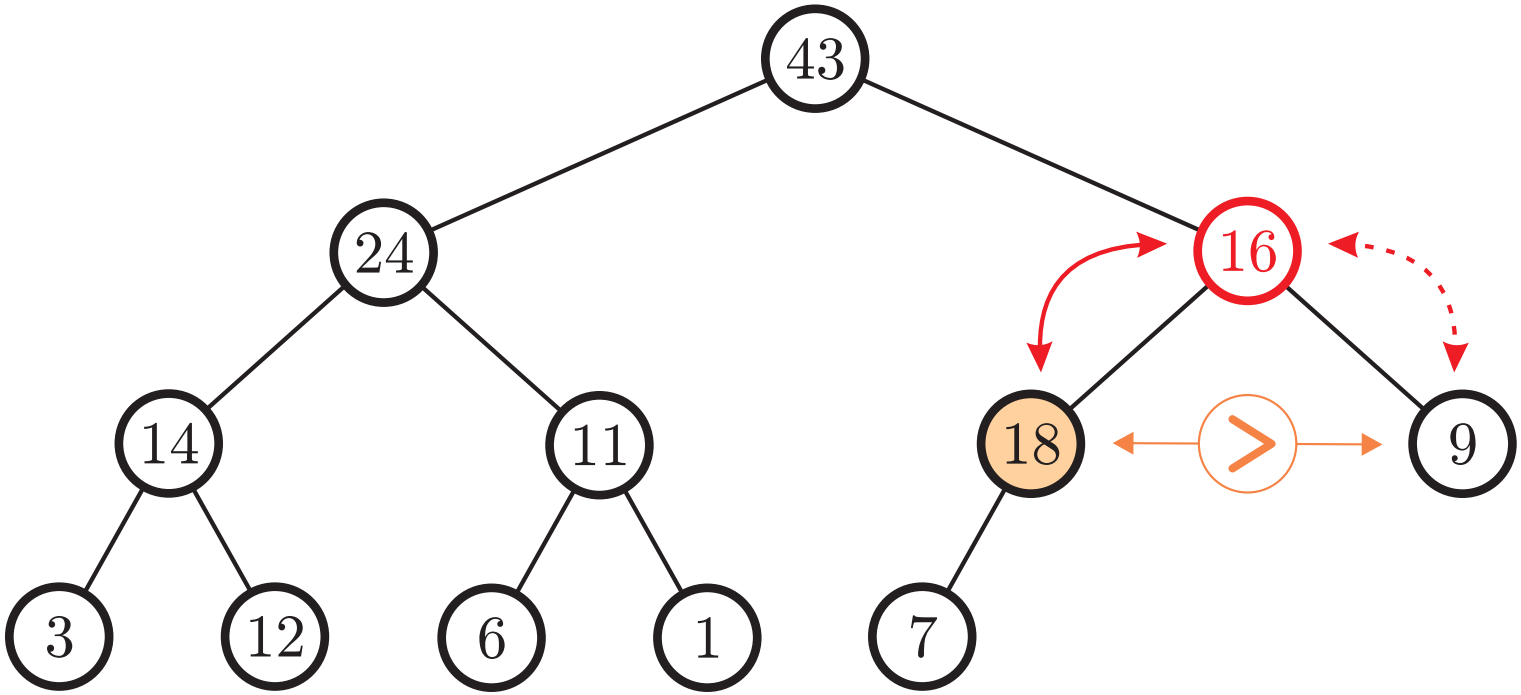
Suppression de la racine

- On supprime toujours la racine :
  - conserver un arbre complet,
  - rétablir l'ordre
    - → on échange avec le fils le plus grand.



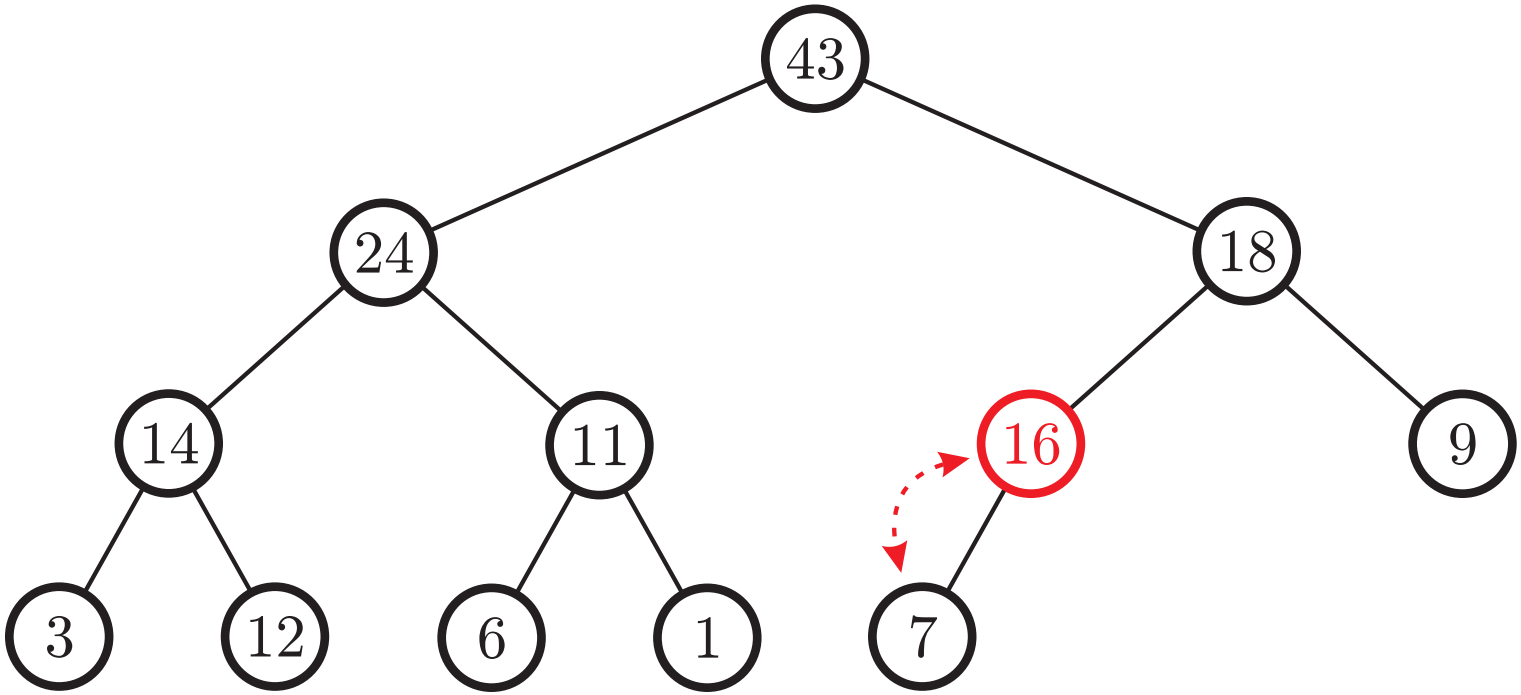
Suppression de la racine

- On supprime toujours la racine :
  - conserver un arbre complet,
  - rétablir l'ordre
    - → on échange avec le fils le plus grand.



Suppression de la racine

- On supprime toujours la racine :
  - conserver un arbre complet,
  - rétablir l'ordre
    - → on échange avec le fils le plus grand.



Complexité des opérations

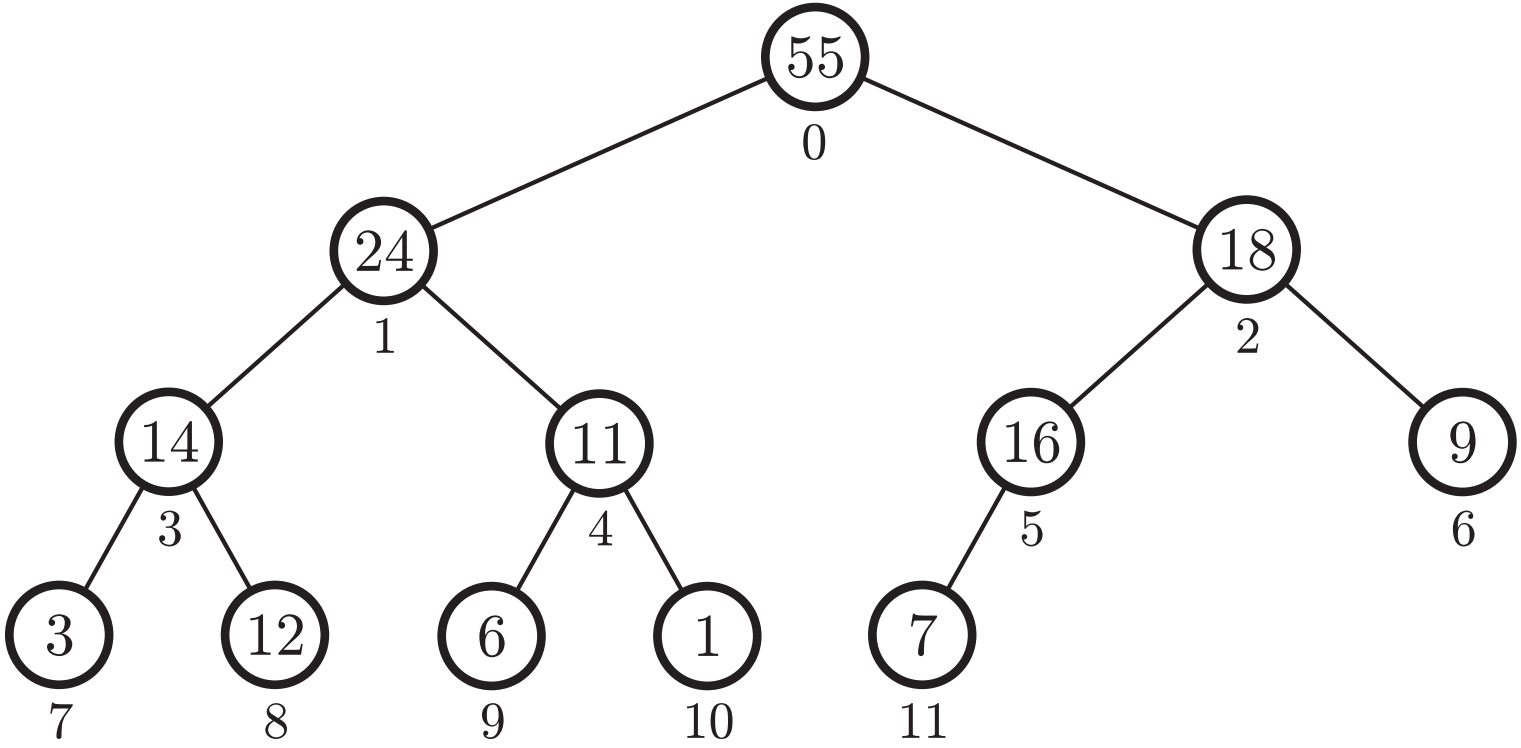
- Avec les algorithmes précédents on obtient les complexités suivantes :
  - recherche du maximum : $\Theta(1)$
  - insertion : $\Theta(\log n)$
  - suppression : $\Theta(\log n)$
- Ce sont des complexités dans le pire cas.

- On peut implémenter cela avec un arbre binaire :
  - il faut ajouter à chaque nœud un lien vers son père,
  - il faut une façon simple d'accéder à la première place libre et à la dernière place occupée :
    → garder un pointeur sur le dernier élément.
- Ça marche, mais c'est un peu lourd...

Implémentation d'un tas à l'aide d'un tableau

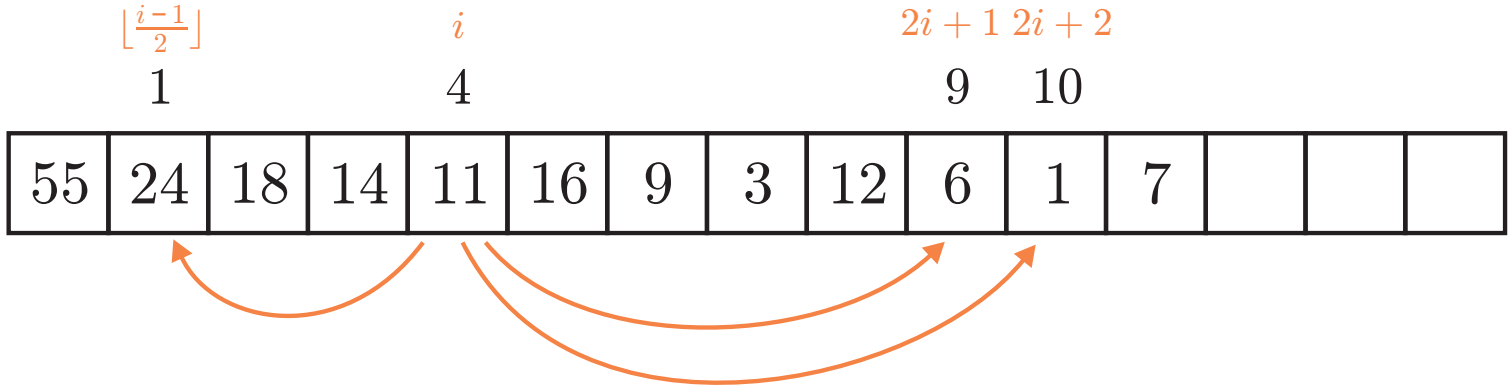
- En général, on utilise un simple tableau :
  - les nœuds sont rangés par niveaux,
  - comme l'arbre est complet, les nœuds sont au début du tableau.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
55	24	18	14	11	16	9	3	12	6	1	7			



Implémentation d'un tas à l'aide d'un tableau

- En général, on utilise un simple tableau :
  - les nœuds sont rangés par niveaux,
  - comme l'arbre est complet, les nœuds sont au début du tableau.
  - ⚠ Cela introduit une limite au nombre d'éléments dans le tas.
- En revanche, on accède facilement à tous les nœuds sans pointeurs :
  - la racine est en 0,
  - le fils gauche du nœud i en $2i + 1$,
  - le fils droit du nœud i en $2i + 2$,
  - le père du nœud i en $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$.



Implémentation d'un tas à l'aide d'un tableau

- Utiliser un tableau ne modifie pas les complexités précédentes :
  - on ne fait qu'échanger des éléments du tas
    → échanger des éléments du tableau, pas de décalages,
  - accéder au fils ou au père se fait toujours en temps constant,
  - on gagne en revanche un accès direct au dernier élément
    → il suffit de savoir le nombre d'éléments présents dans le tas.

```
1 typedef struct {
2   int max;      /* capacité totale du tas       */
3   int n;        /* nombre de noeuds dans le tas */
4   int* tab;     /* tableau des noeuds           */
5 } heap;
```

(voir TD 12)

Tri par tas
Heapsort

- Insérer n éléments dans un tas coûte $\Theta(n \log n)$.
- Les extraire en ordre décroissant coûte aussi $\Theta(n \log n)$.

- On peut trier n éléments en $\Theta(n \log n)$ en moyenne, comme dans le pire cas.
  - comportement similaire au tri fusion,
  - en revanche, on peut implémenter ce tri en place.
    - → en pratique, moins rapide que le tri rapide (en moyenne).

Exemple d'application

Sélection des 10 plus grands éléments

- Un programme reçoit une longue série d'éléments :
  - il ne doit conserver que les 10 plus grands parmi ces éléments,
  - il a une mémoire très limitée
    - → ne peut pas stocker tout ce qui arrive.

→ Comment faire ?

Exemple d'application

Sélection des 10 plus grands éléments

- Un programme reçoit une longue série d'éléments :
  - il ne doit conserver que les 10 plus grands parmi ces éléments,
  - il a une mémoire très limitée
    - → ne peut pas stocker tout ce qui arrive.

- Il suffit de garder en mémoire un tas contenant en permanence les 10 plus grands éléments reçus :
  - on insère les 10 premiers éléments reçus,
  - chaque nouvel éléments est comparé au plus petit
    - → il faut un tas ayant le minimum à la racine,
  - si le nouvel élément est plus grand :
    - on enlève la racine,
    - on insère le nouvel élément.

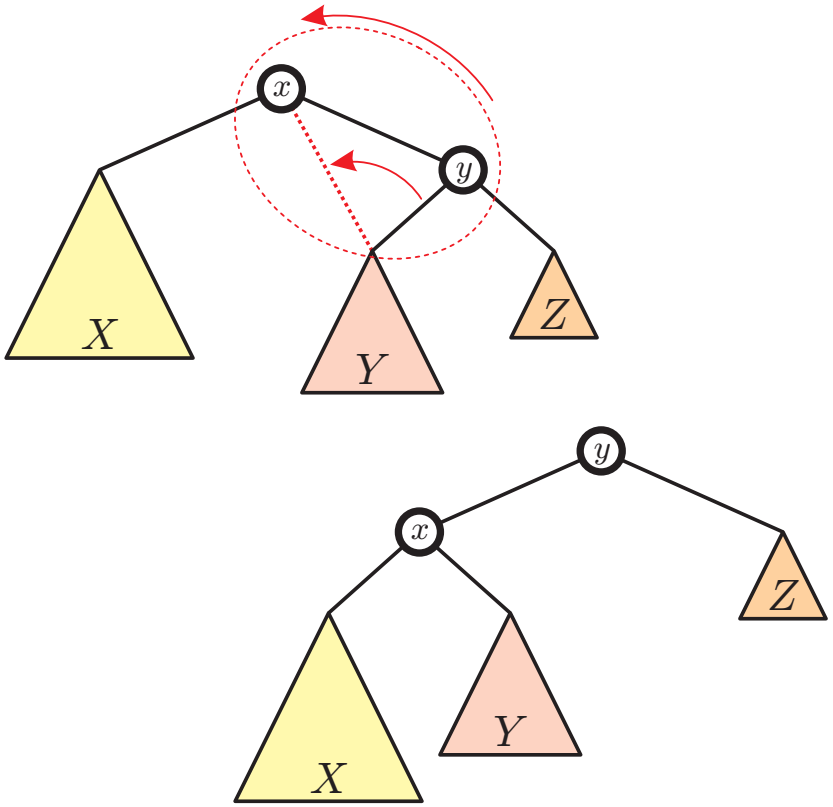
- Dans le pire cas, on fait $n \log 10$ comparaisons.

Rééquilibrage d'arbres

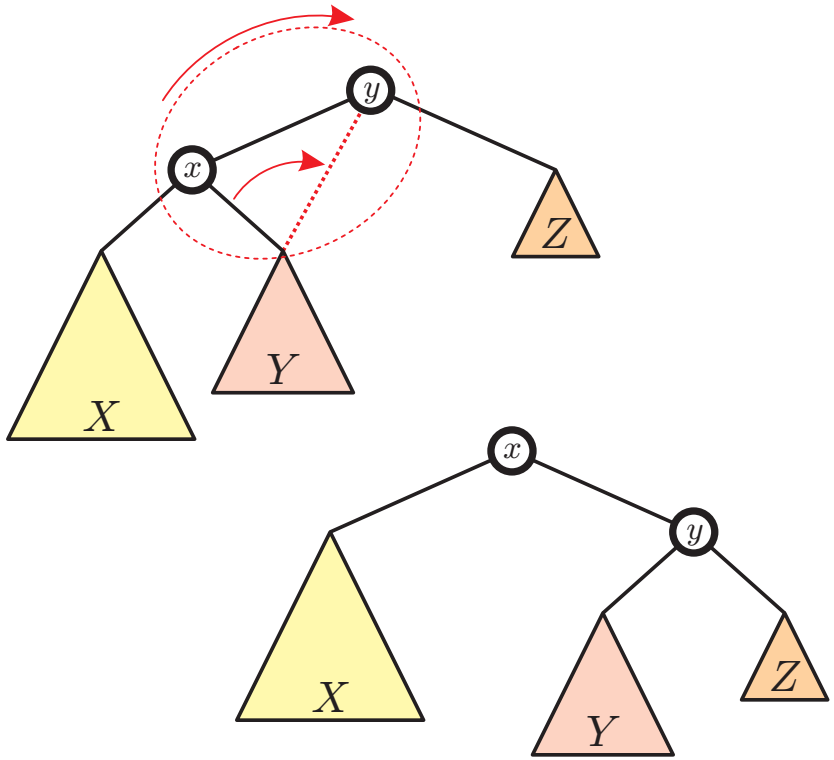
Rotations

- Une rotation permet de rééquilibrer localement un arbre.
  - préserve l'ordre infixe des clefs → préserve la structure d'ABR,
  - se réalise en temps constant.

Rotation gauche

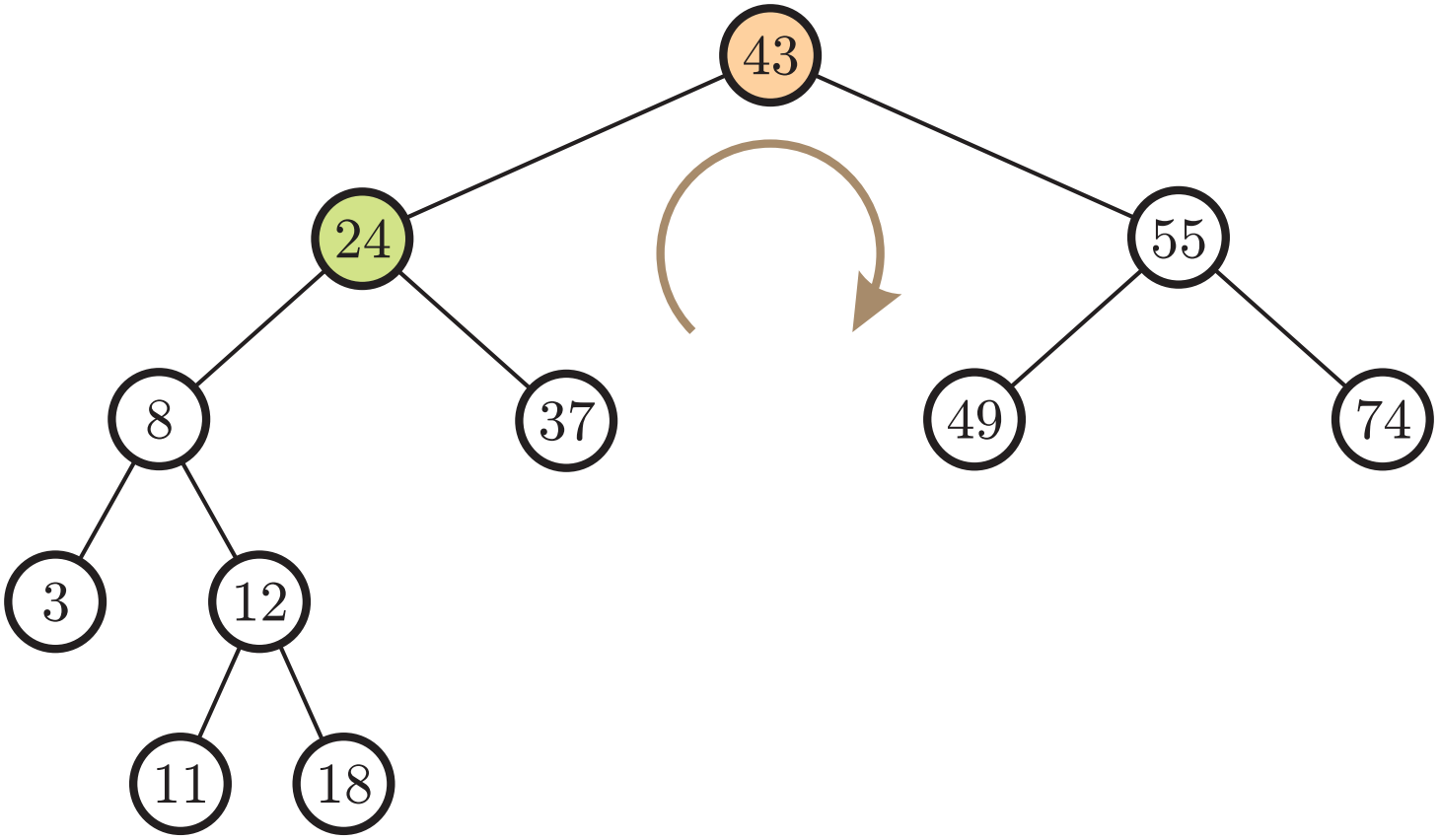


Rotation droite



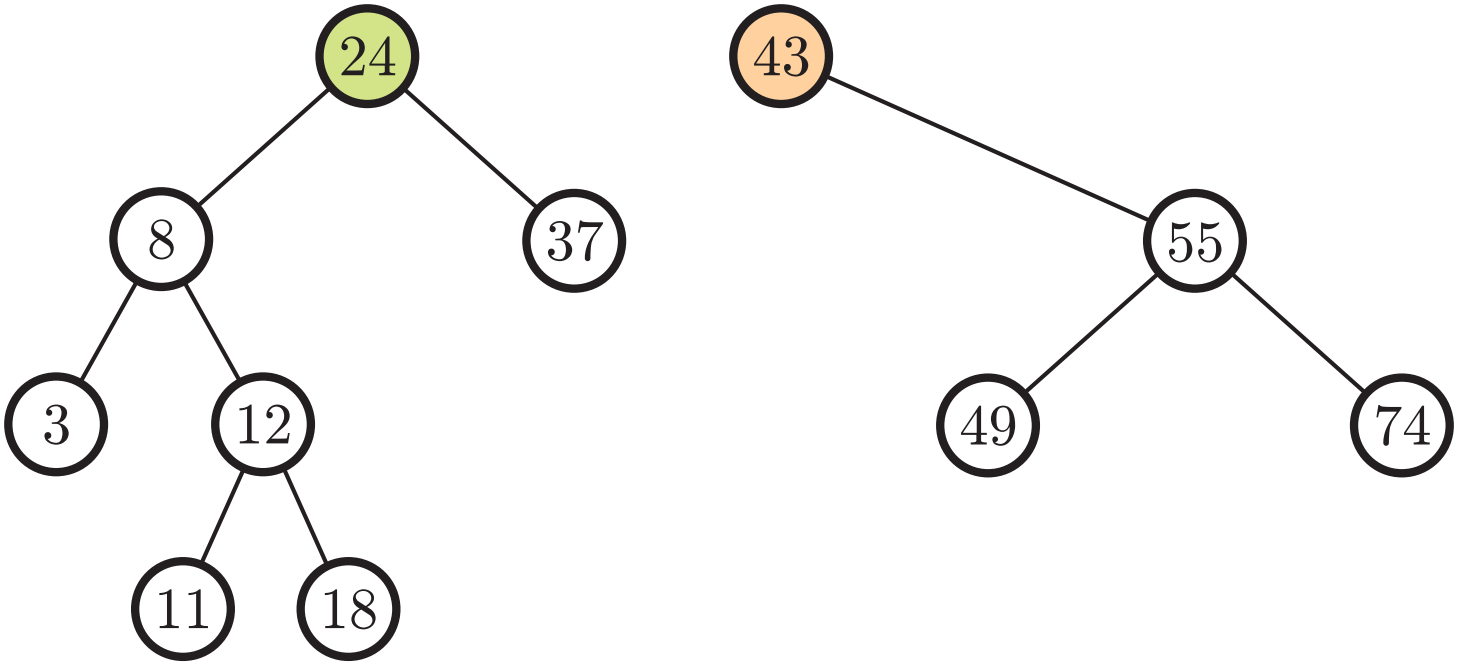
Exemple de rotation à droite

- On part d'un arbre déséquilibré :
  - le sous-arbre gauche est plus haut que le droit,
    - → rotation à droite en 43.



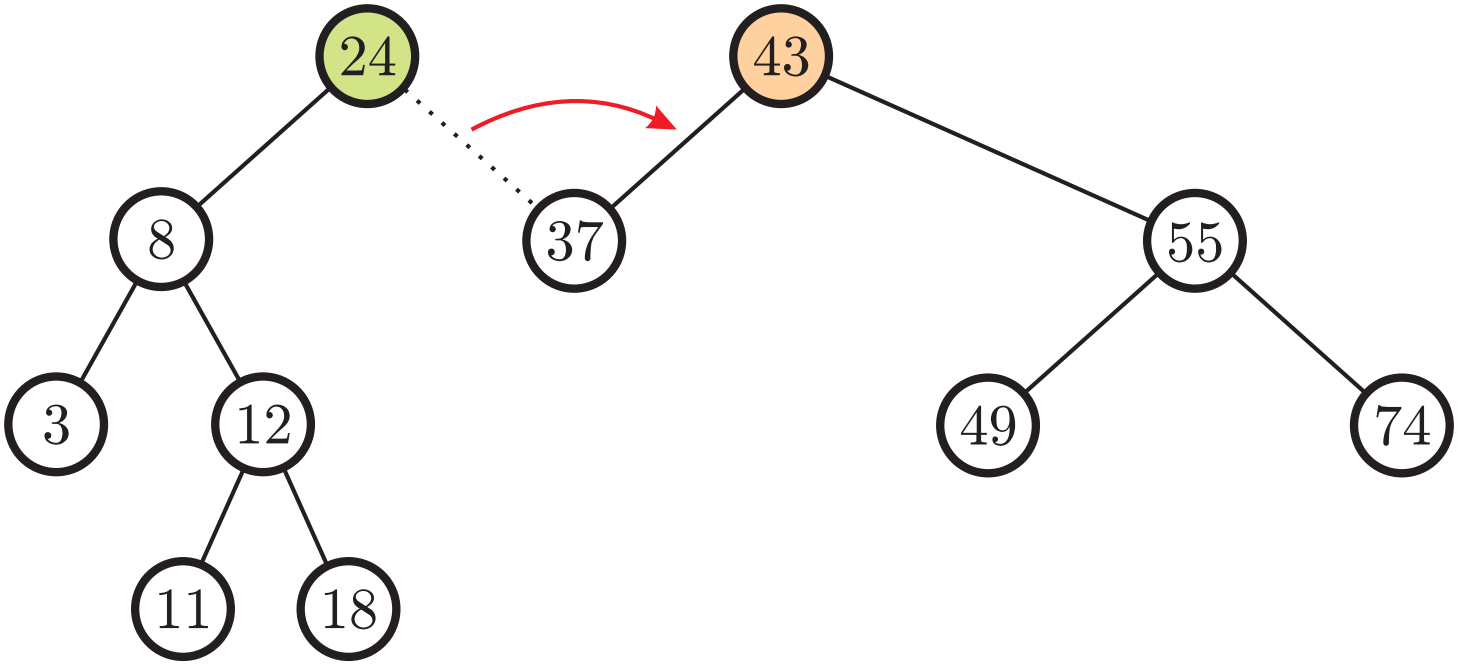
Exemple de rotation à droite

- La racine 24 du sous-arbre gauche sera la nouvelle racine.



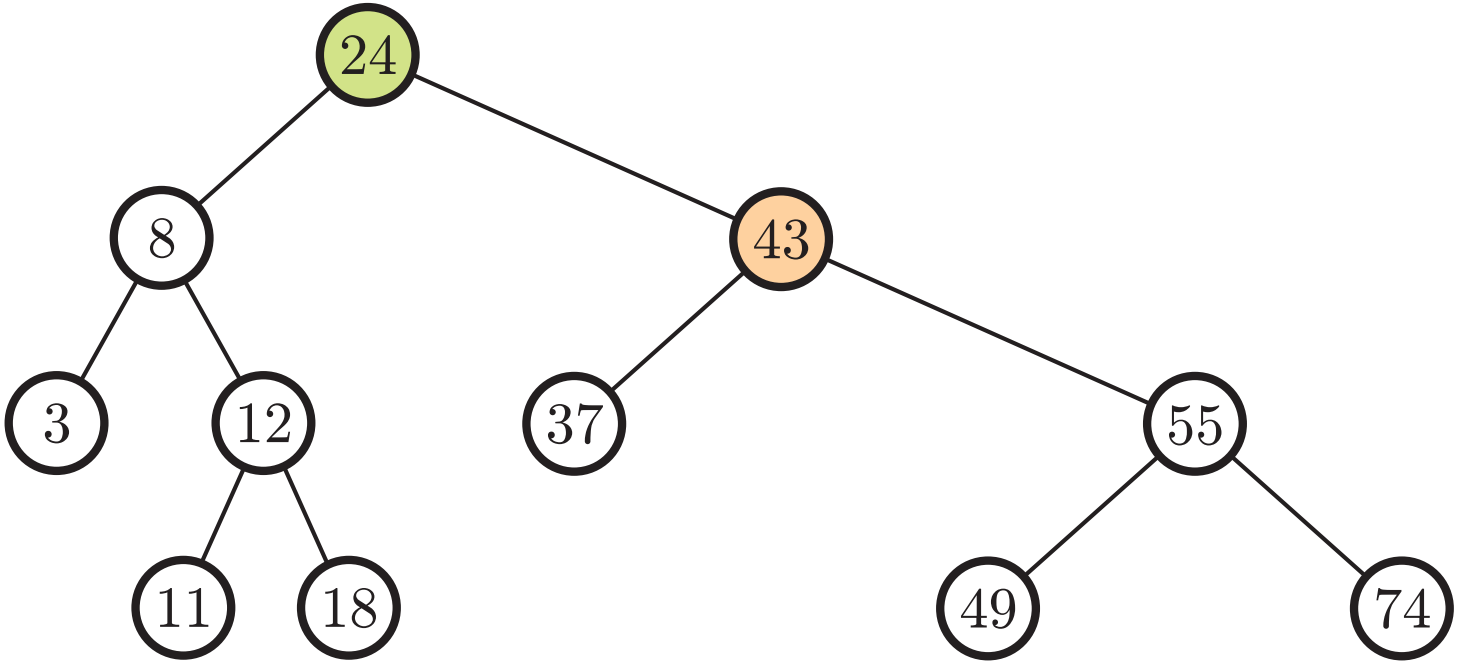
Exemple de rotation à droite

- Le sous-arbre droit de 24 devient fils gauche de 43.



Exemple de rotation à droite

- L'ancienne racine 43 devient fils droit de la nouvelle racine 24.
  - l'arbre est mieux équilibré qu'avant !
  - l'ordre ABR a été préservé (mouvements "verticaux" seulement).



Arbres équilibrés

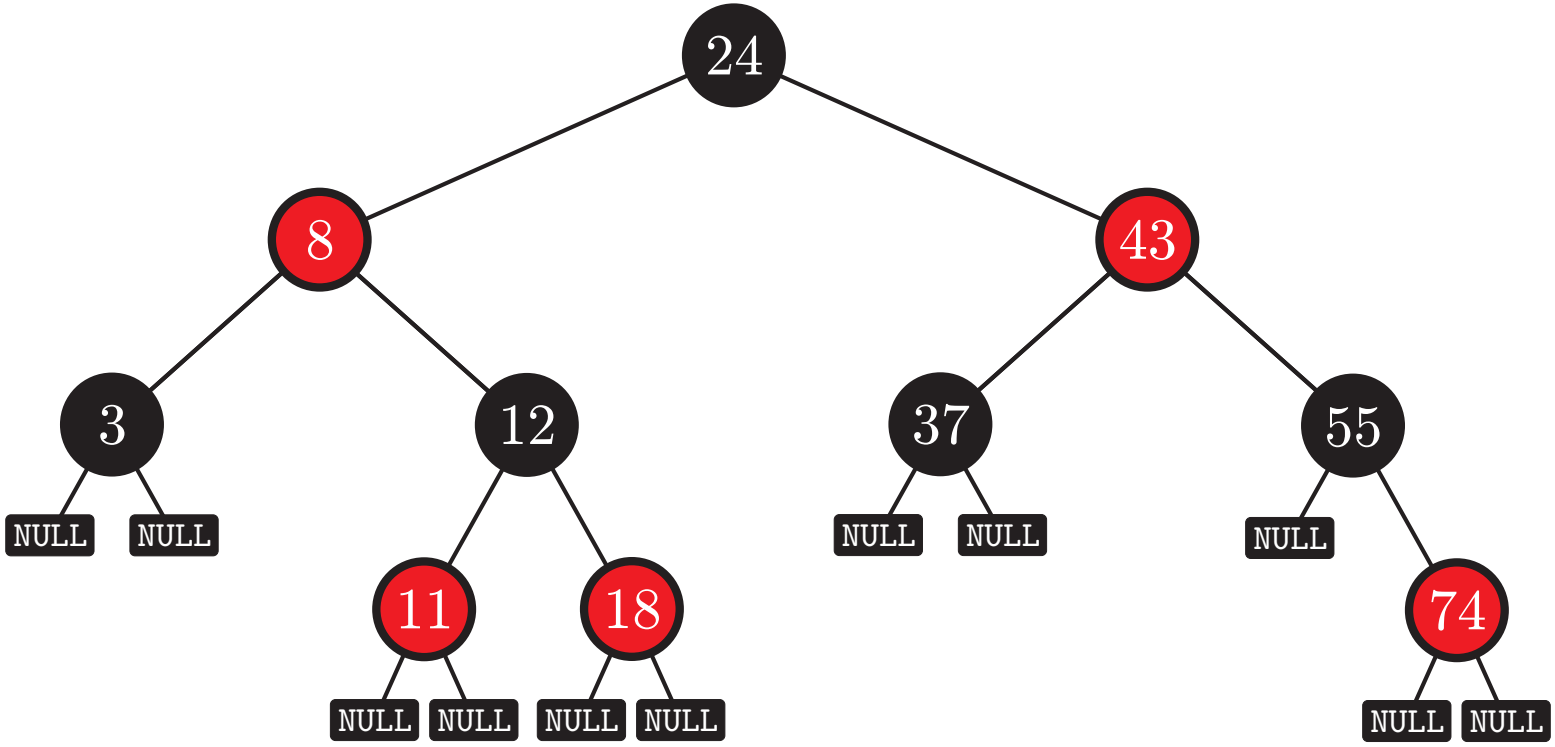
Les familles les plus connues

- Un arbre est équilibré si toutes ses feuilles sont situées à peu près à la même hauteur,
  - cela implique en général $h = \Theta(\log n)$.

- Plusieurs type d'ABR équilibrés existent, chacun avec des propriétés différentes :
  - arbres bicolores (ou arbres rouge/noir),
  - arbres 2-3,
  - arbres AVL...

Arbres rouge/noir
[Bayer – 1972]

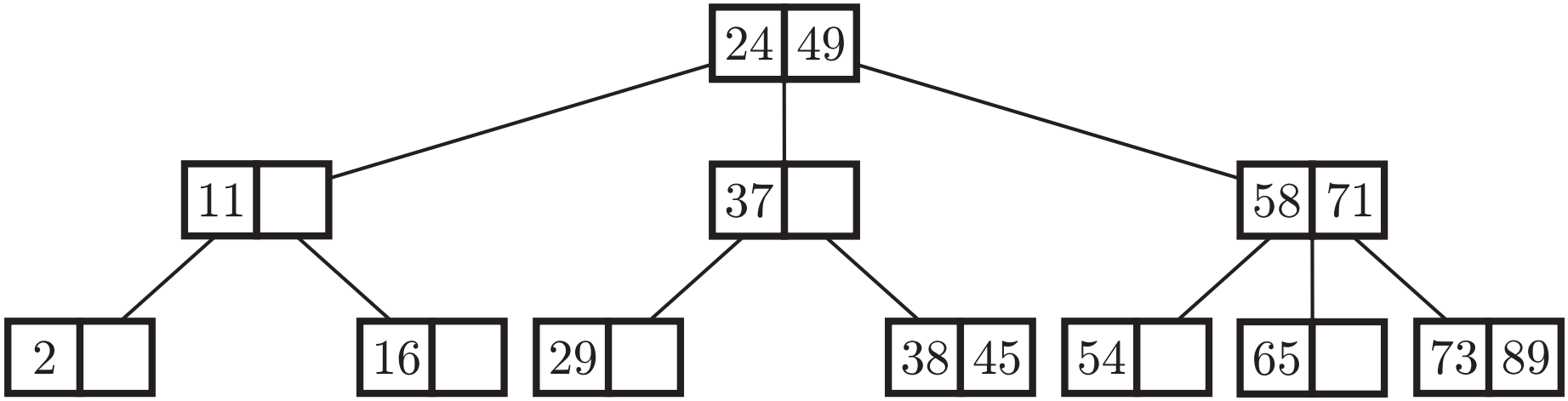
- Chaque nœud est soit rouge, soit noir :
  - la racine et les feuilles (vides) sont noires,
  - un nœud rouge n'a que des fils noirs,
  - même nombre de nœuds noirs entre la racine et chaque feuille,
    - → branches longues (au pire) deux fois comme les plus courtes.



Arbres 2-3
[Bayer, Creight – 1972]

- Un nœud peut contenir une ou deux valeurs et a 2 ou 3 fils
  - les feuilles sont toutes à la même hauteur,
  - se généralise en B-arbres avec de L à U fils et L-1 à U-1 valeurs.
- Un peu compliqués à utiliser

(*cf.* http://people.ksp.sk/~kuko/bak/index.html)



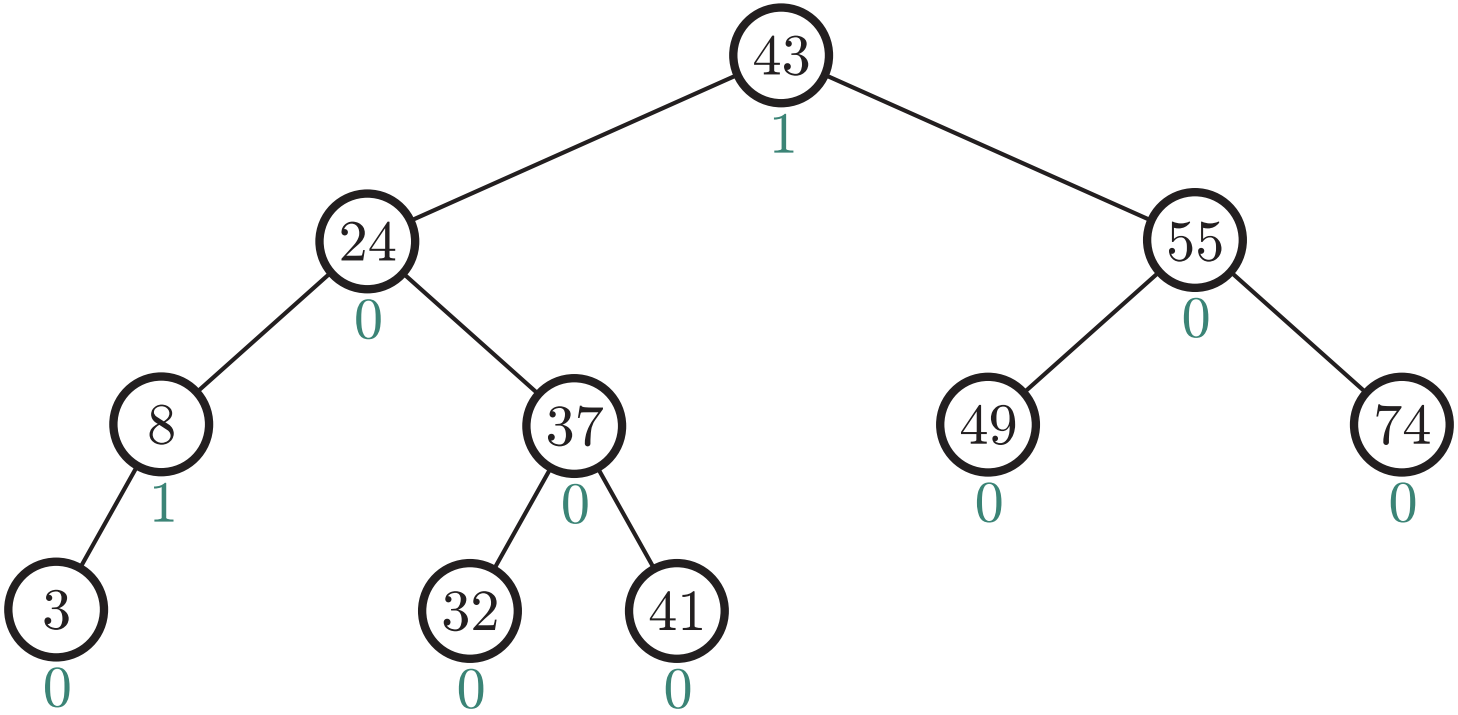
Arbres AVL

[Adelson, Velskii et Landis – 1962]

- ABR avec une marque d'équilibrage δ pour chaque nœud :

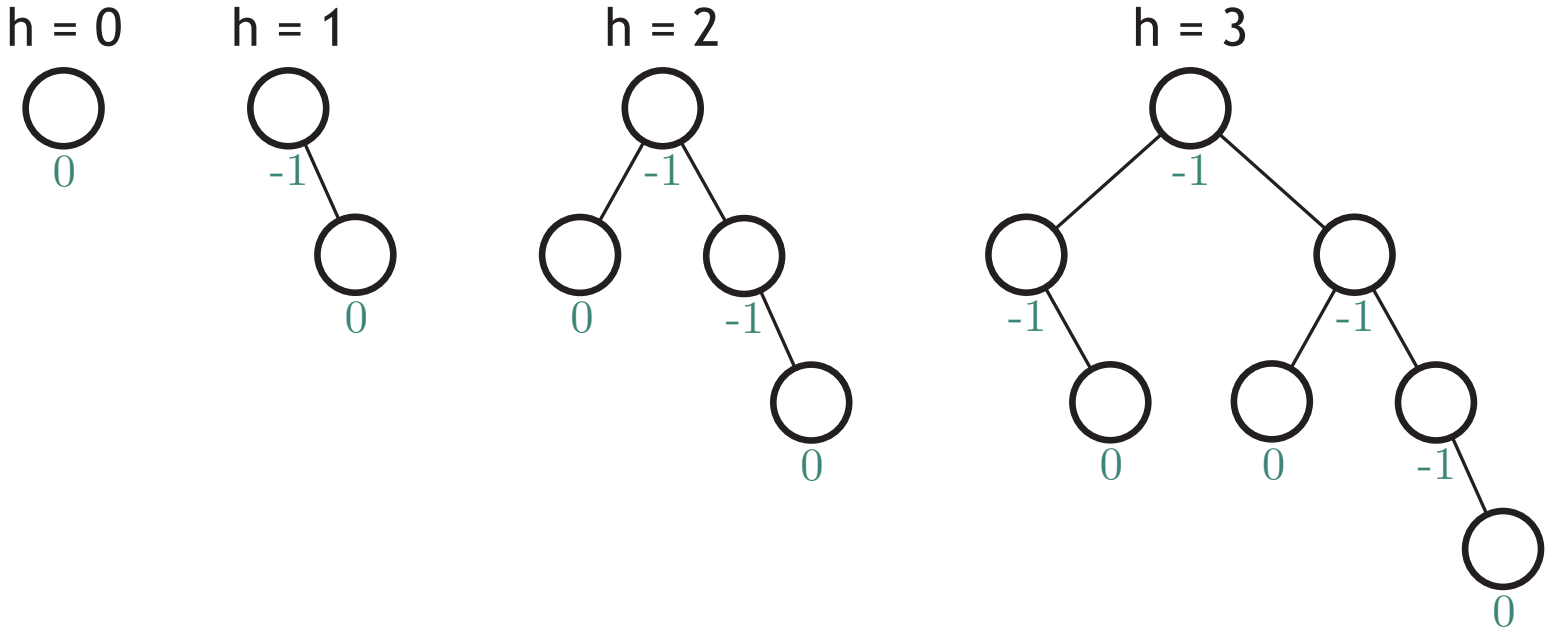
$$\delta = h(\text{fils gauche}) - h(\text{fils droit}) \quad \text{et} \quad |\delta| \leq 1.$$

- Recherche, insertion, suppression : comme dans un ABR standard
  → mise à jour de δ et rééquilibrage si nécessaire.



Profondeur maximale d'un arbre AVL

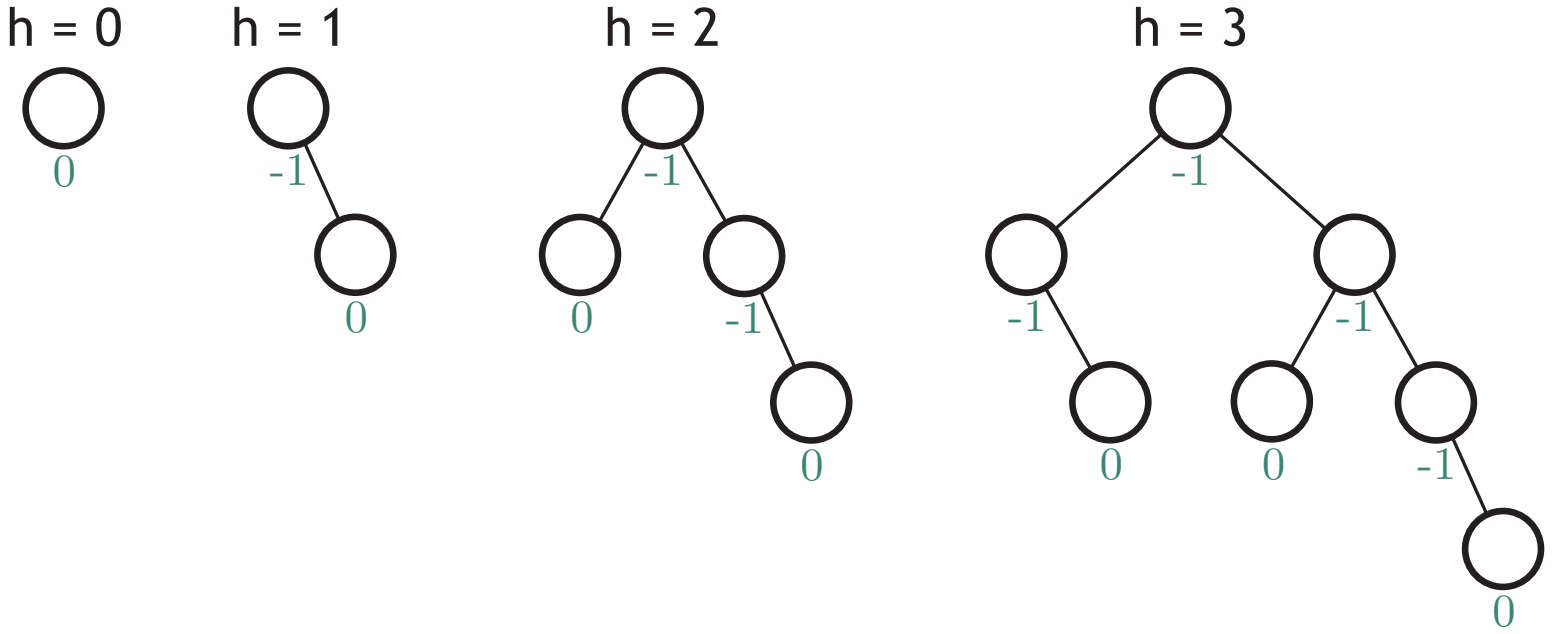
- On cherche à construire l'arbre AVL de hauteur h ayant le moins de nœuds possible :



- L'arbre minimal de hauteur h est constitué :
  - d'une racine,
  - d'un fils gauche AVL de hauteur $h-1$,
  - d'un fils droit AVL de hauteur $h-2$.

Profondeur maximale d'un arbre AVL

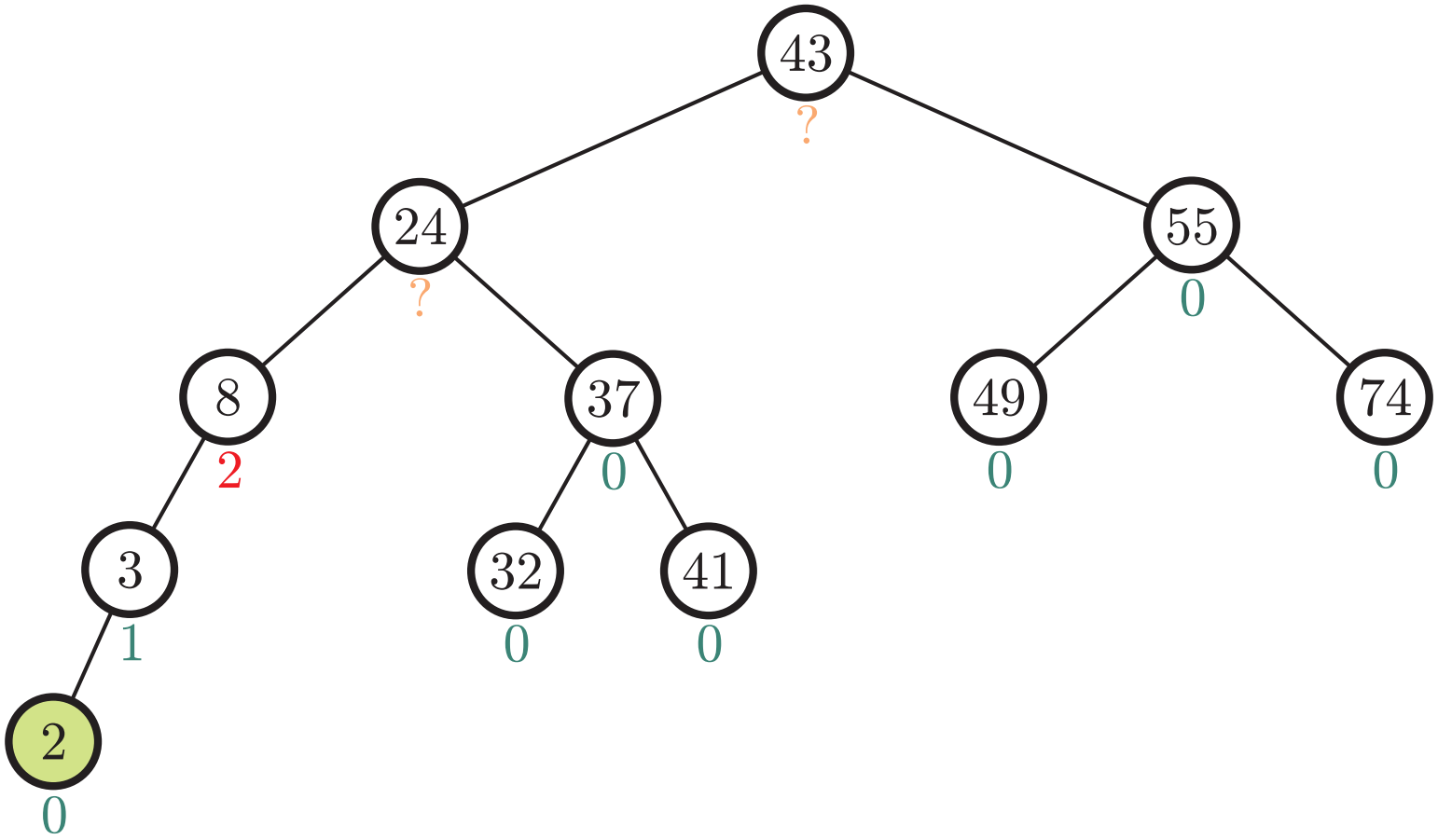
- On cherche à construire l'arbre AVL de hauteur h ayant le moins de nœuds possible :



- Si $N(h)$ est le nombre minimal de nœuds d'un arbre de hauteur h : $N(h) = 1 + N(h-1) + N(h-2)$, avec $N(0) = 1, N(1) = 2$.
  → on retrouve la formule de la suite de Fibonacci.
- On trouve : $N(h) = \Theta(\phi^n)$ et donc $h = \Theta(\log n)$
  → un arbre AVL de n nœuds a une hauteur logarithmique.

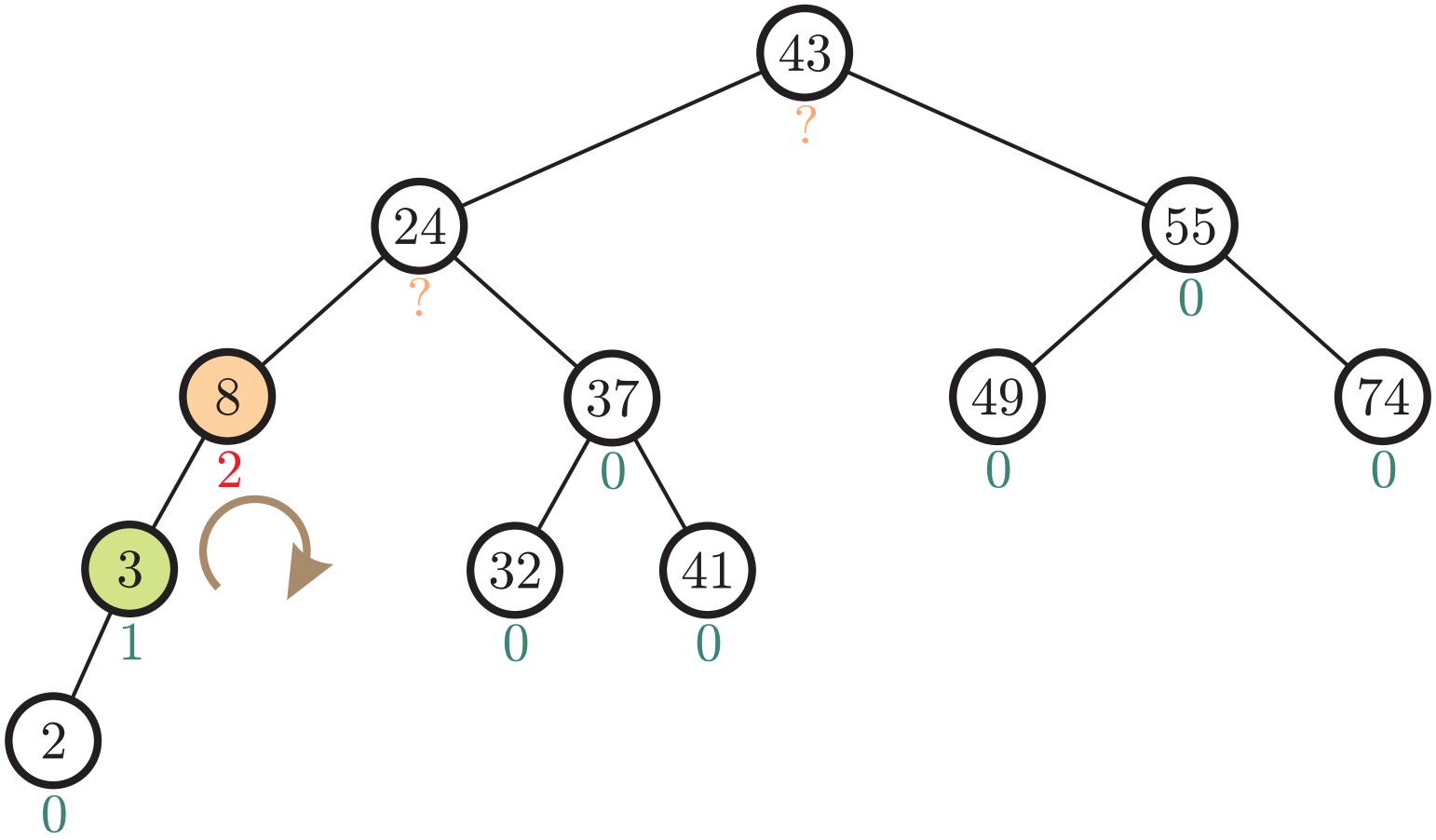
Insertion dans un AVL

- On insère le nœud 2 → déséquilibre à gauche.



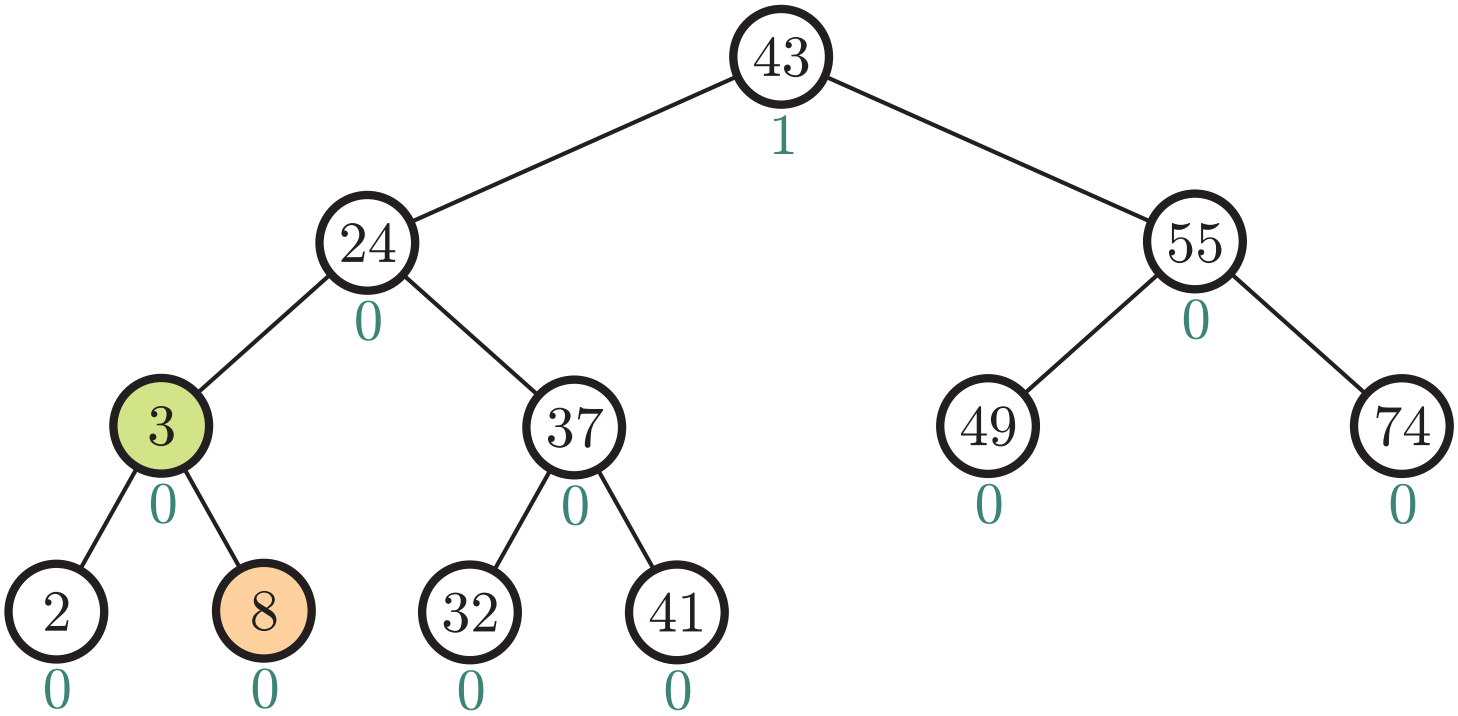
Insertion dans un AVL

- On insère le nœud 2 → déséquilibre à gauche
  → une rotation à droite permet de rétablir la propriété AVL.



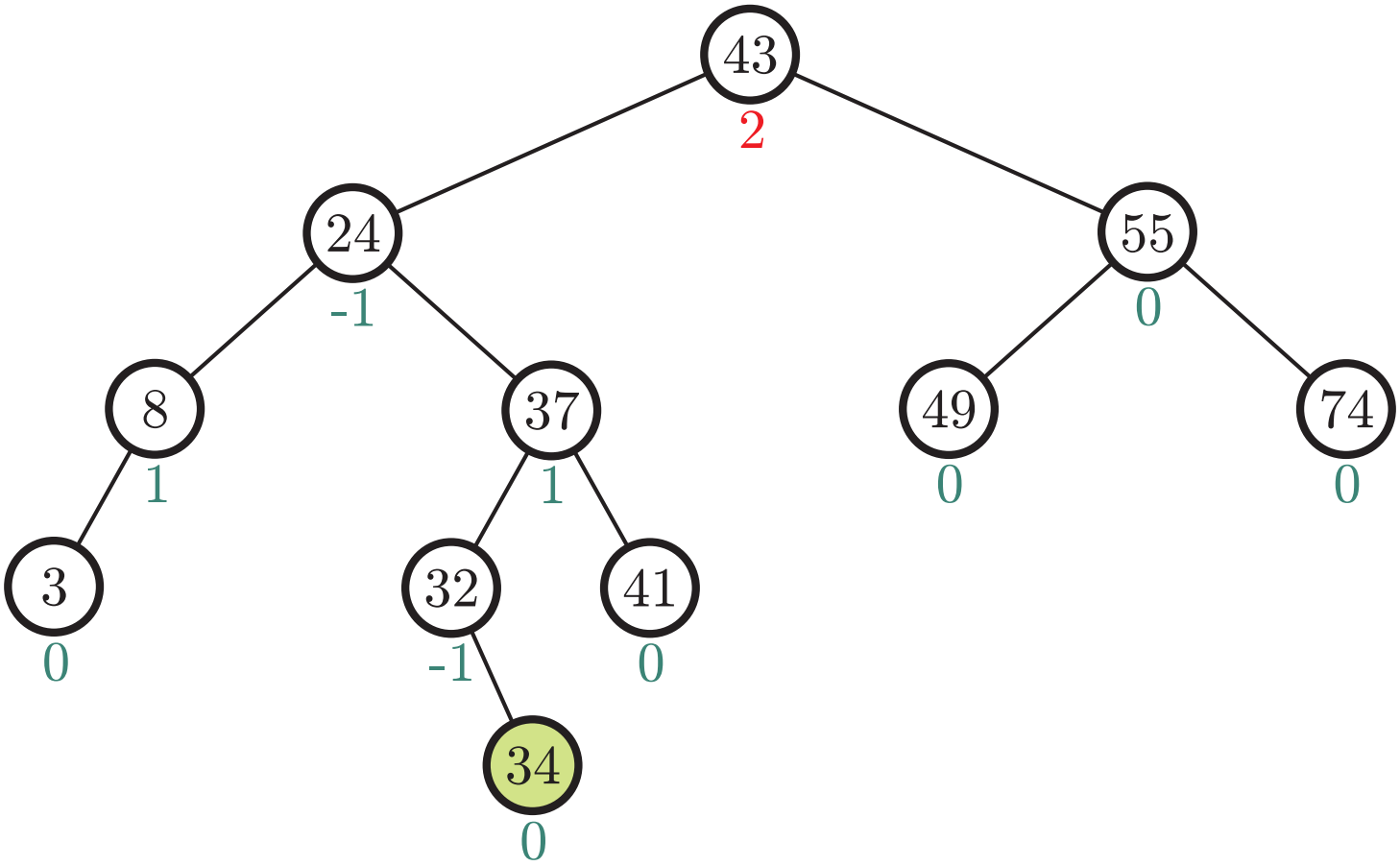
Insertion dans un AVL

- On insère le nœud 2 → déséquilibre à gauche
  → une rotation à droite permet de rétablir la propriété AVL.



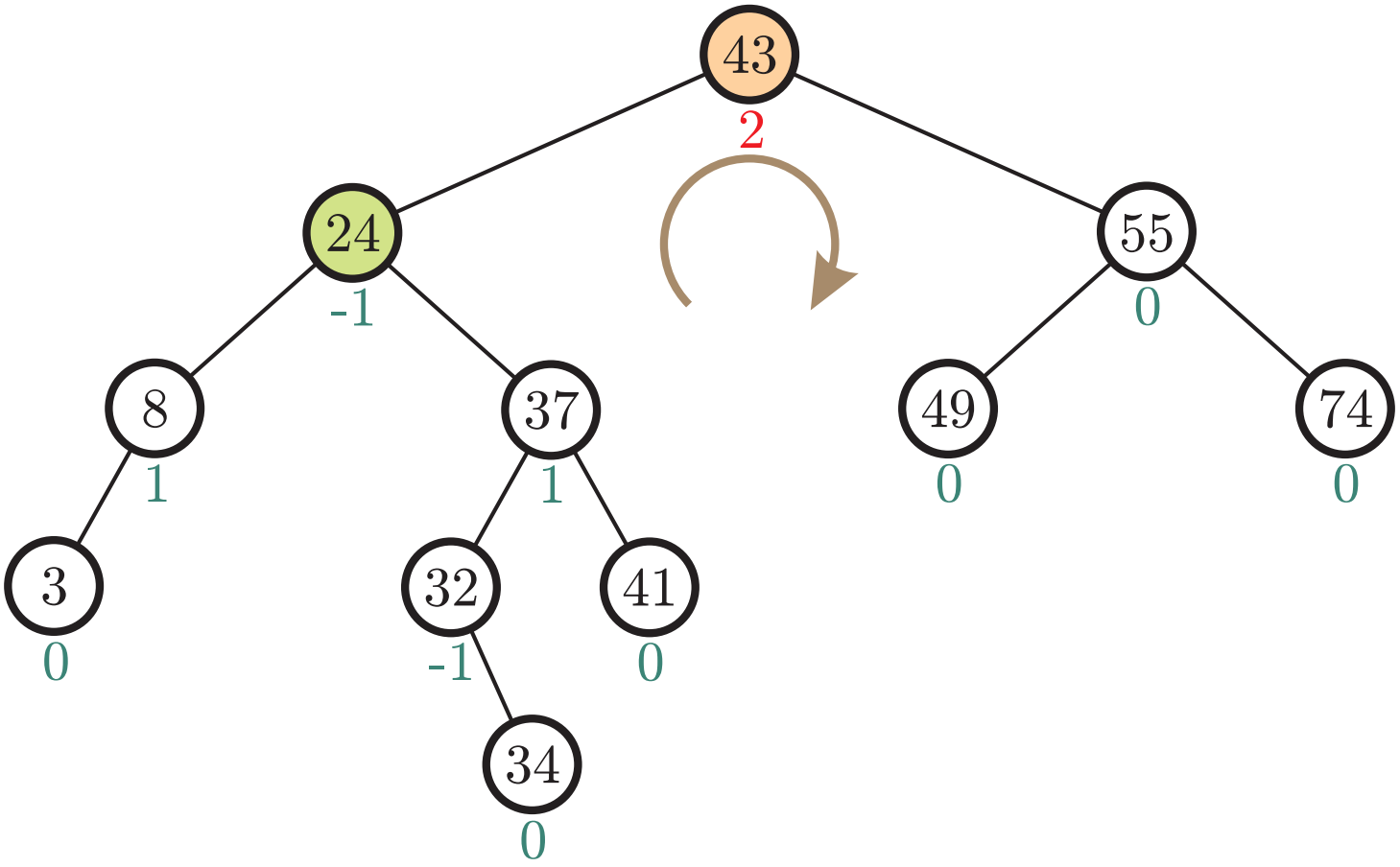
Insertion dans un AVL

- Si à la place on insère 34 → encore un déséquilibre à gauche.



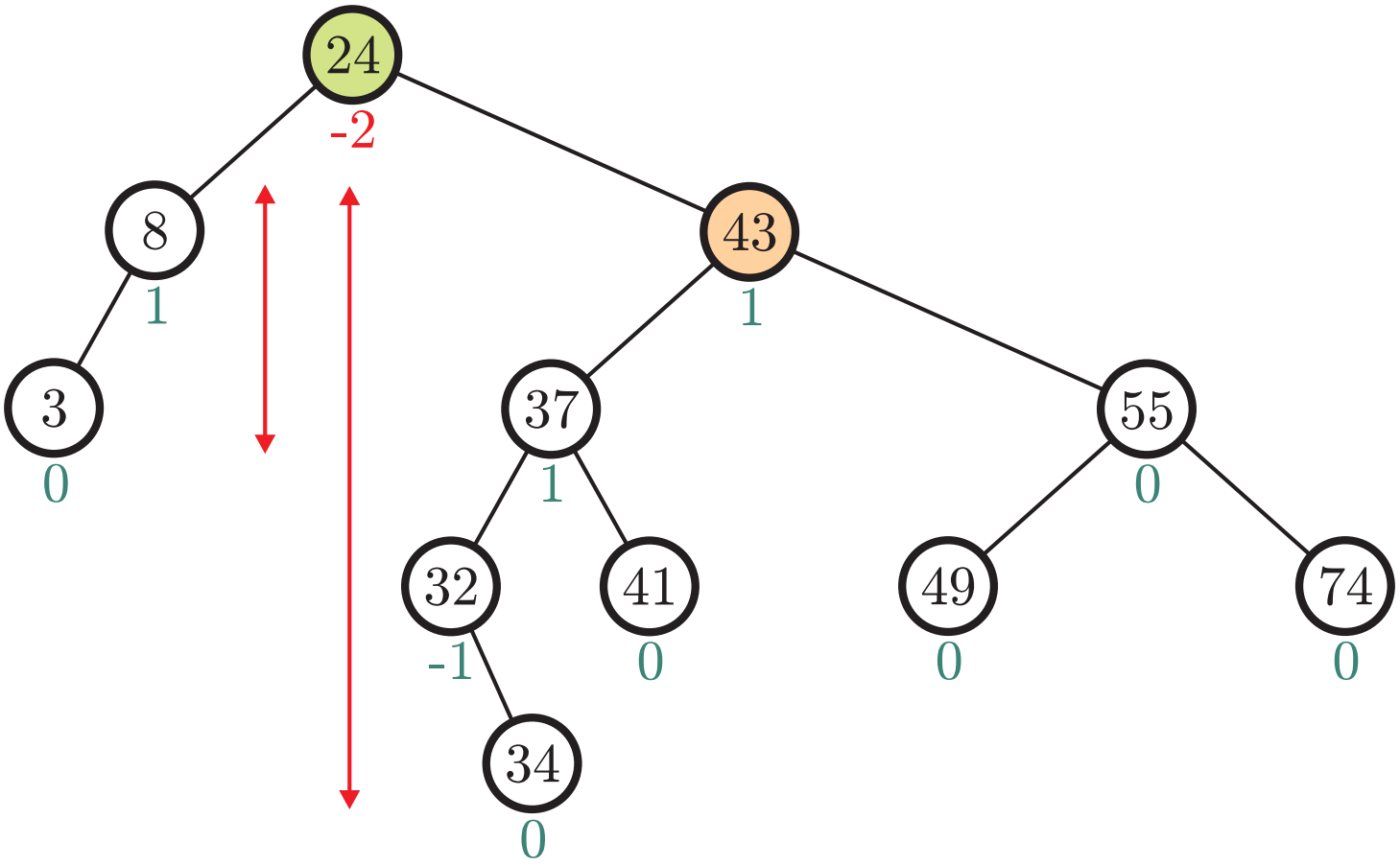
Insertion dans un AVL

- Si à la place on insère 34 → encore un déséquilibre à gauche
  → une rotation à droite ne suffit pas à rétablir la propriété AVL.



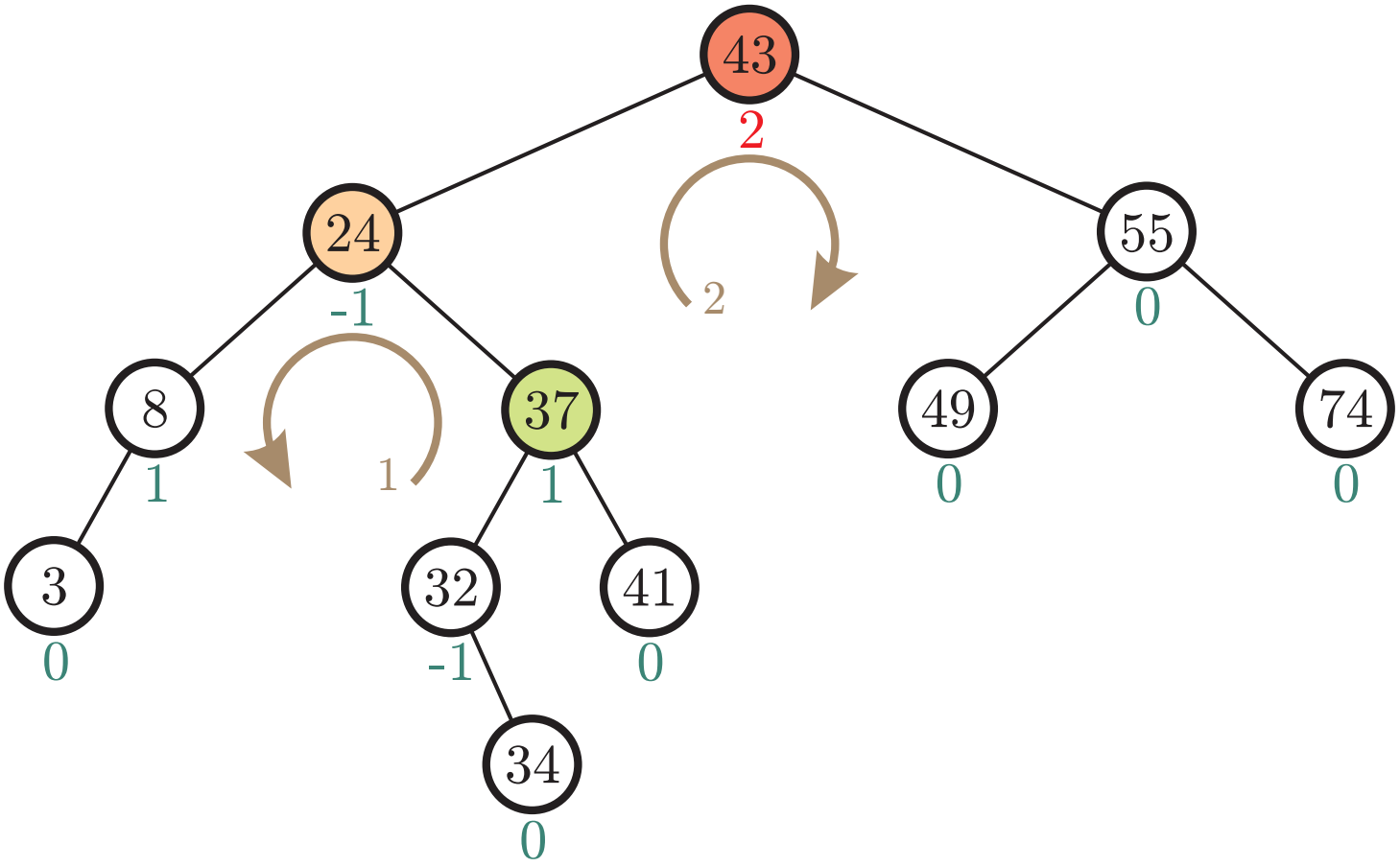
Insertion dans un AVL

- Si à la place on insère 34 → encore un déséquilibre à gauche
  → une rotation à droite ne suffit pas à rétablir la propriété AVL.



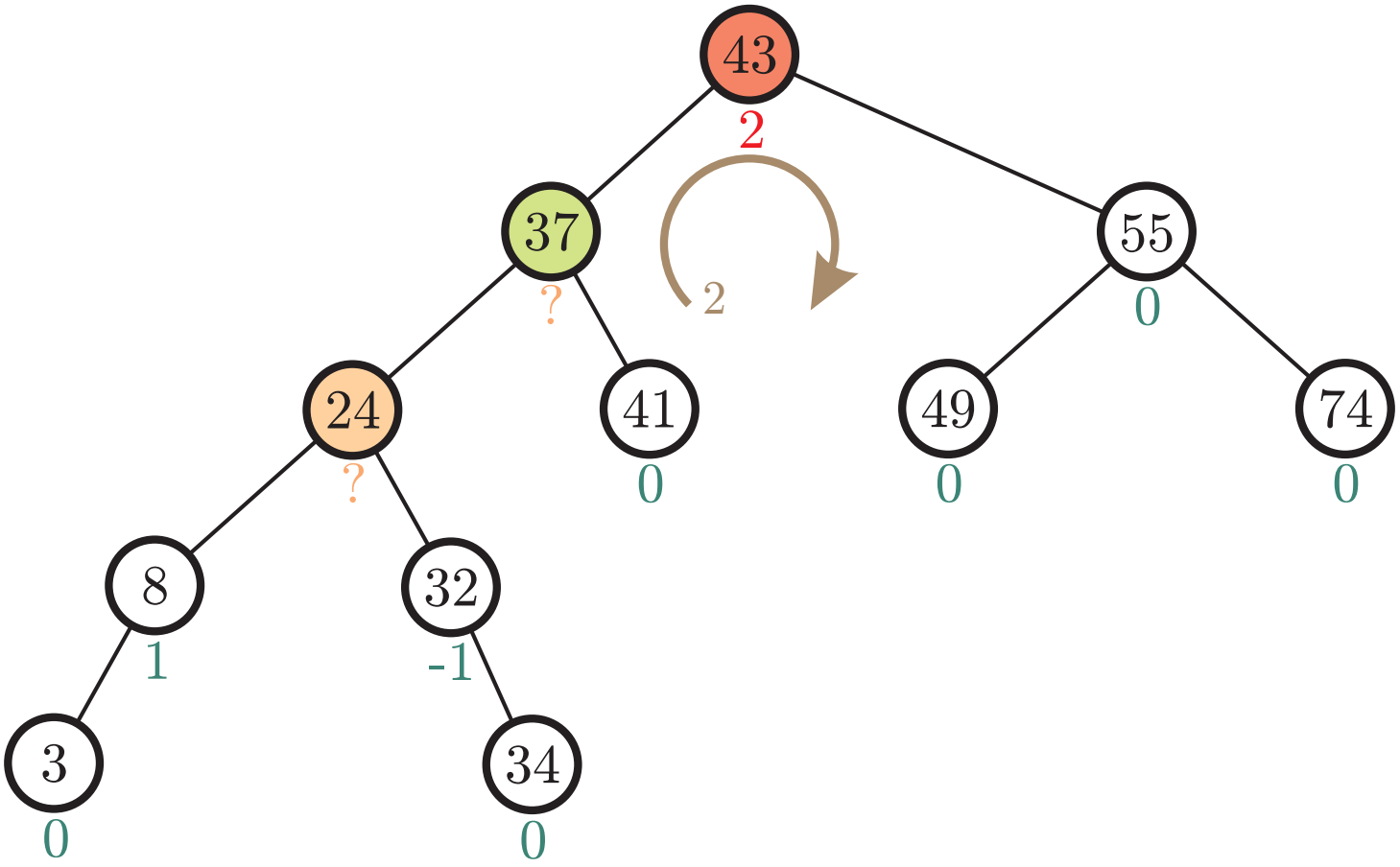
Insertion dans un AVL

- Si à la place on insère 34 → encore un déséquilibre à gauche
  → on doit effectuer une double rotation.



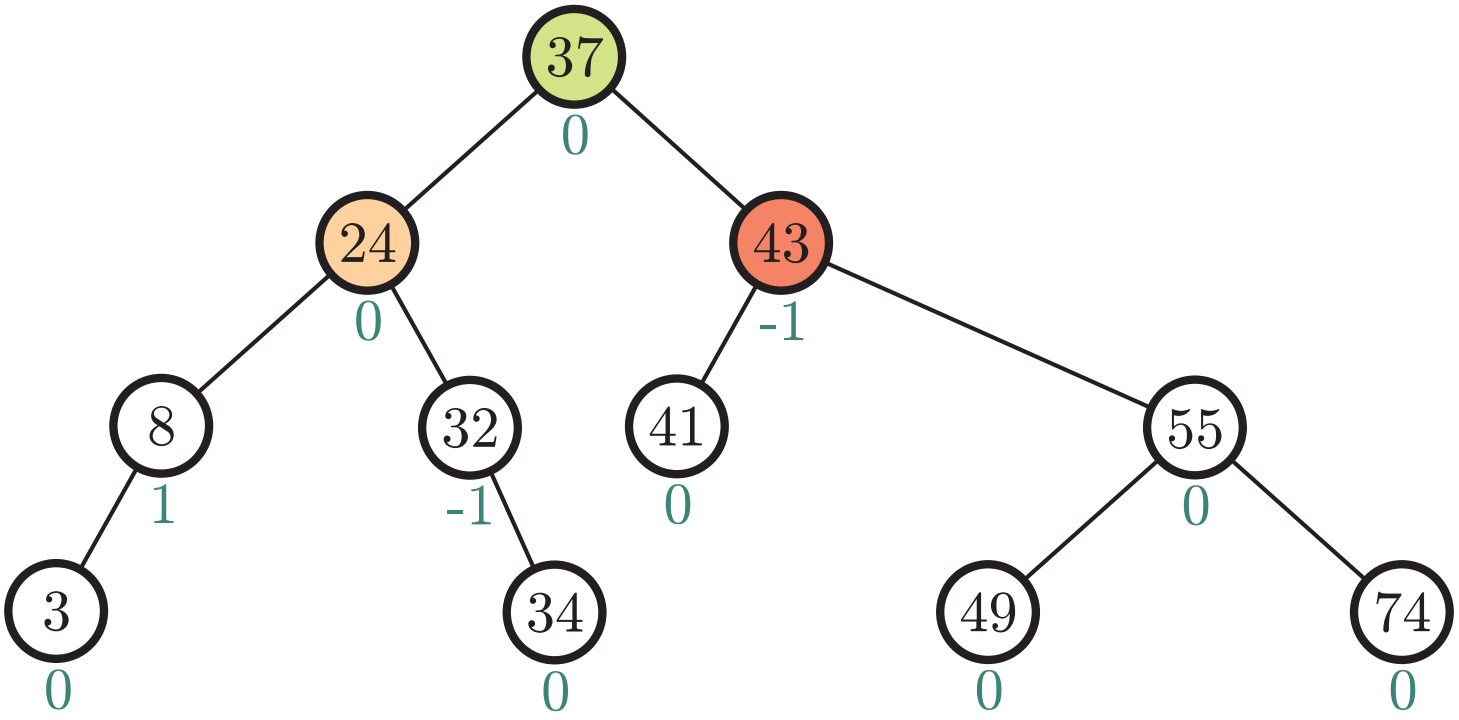
Insertion dans un AVL

- Si à la place on insère 34 → encore un déséquilibre à gauche
  → on doit effectuer une double rotation.



Insertion dans un AVL

- Si à la place on insère 34 → encore un déséquilibre à gauche
  → on doit effectuer une double rotation.



Implémentation d'un AVL

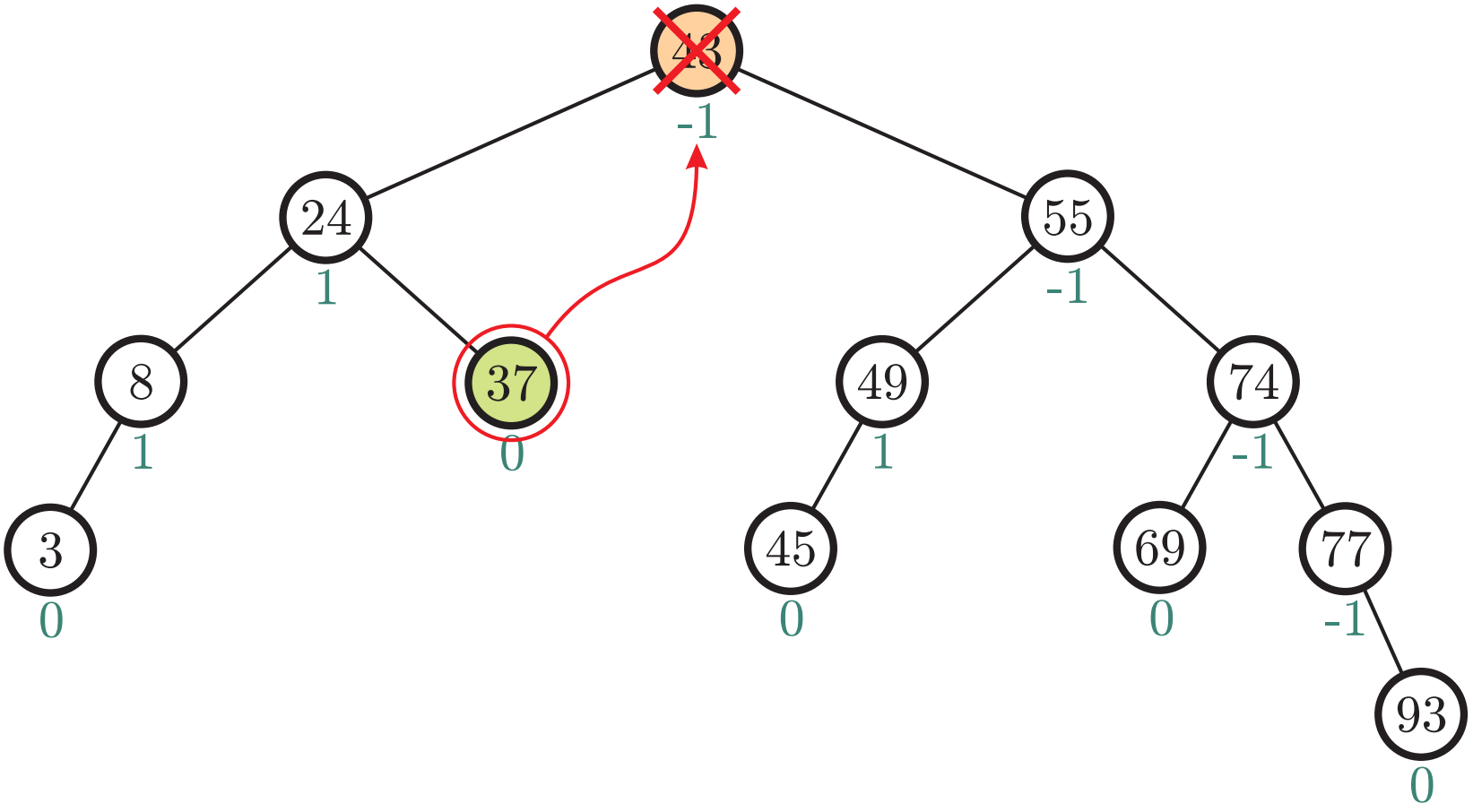
- Pour implémenter un AVL, il suffit de stocker dans chaque nœud la hauteur du sous-arbre dont il est racine.
  - lors d'une insertion/suppression on remet à jour les hauteurs : sur une seule branche → complexité en $\Theta(\log n)$ quand même.

- Ensuite, on reparcours la branche pour rechercher les déséquilibres :
  - insertion : une seule (double) rotation suffit,
  - suppression : jusqu'à h (double) rotations nécessaires.

- Les complexités restent les mêmes que pour un ABR standard :
  → tout coûte $\Theta(h)$, mais $h = \Theta(\log n)$.

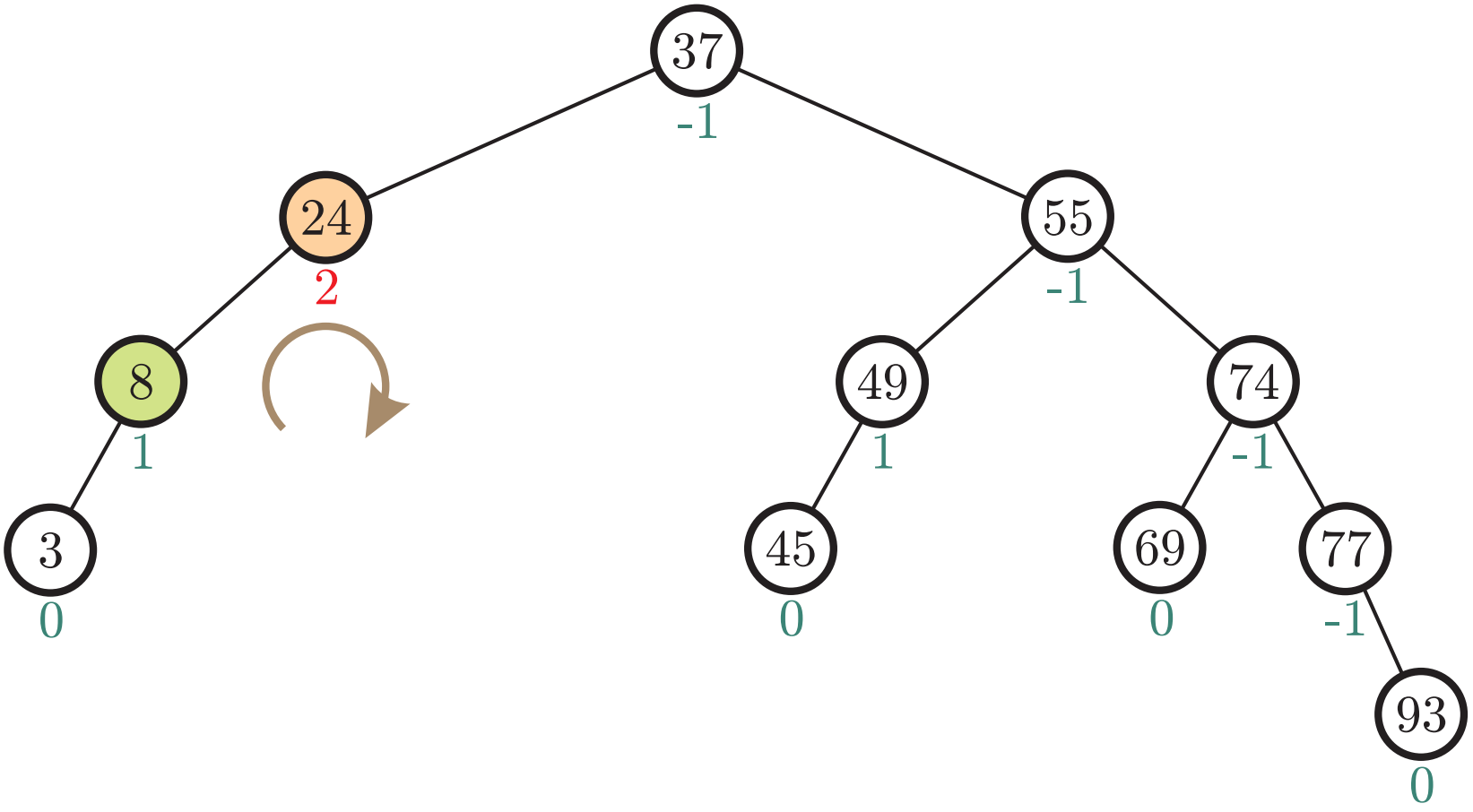
Exemple de suppression

Jusqu'à h rotations peuvent être nécessaires



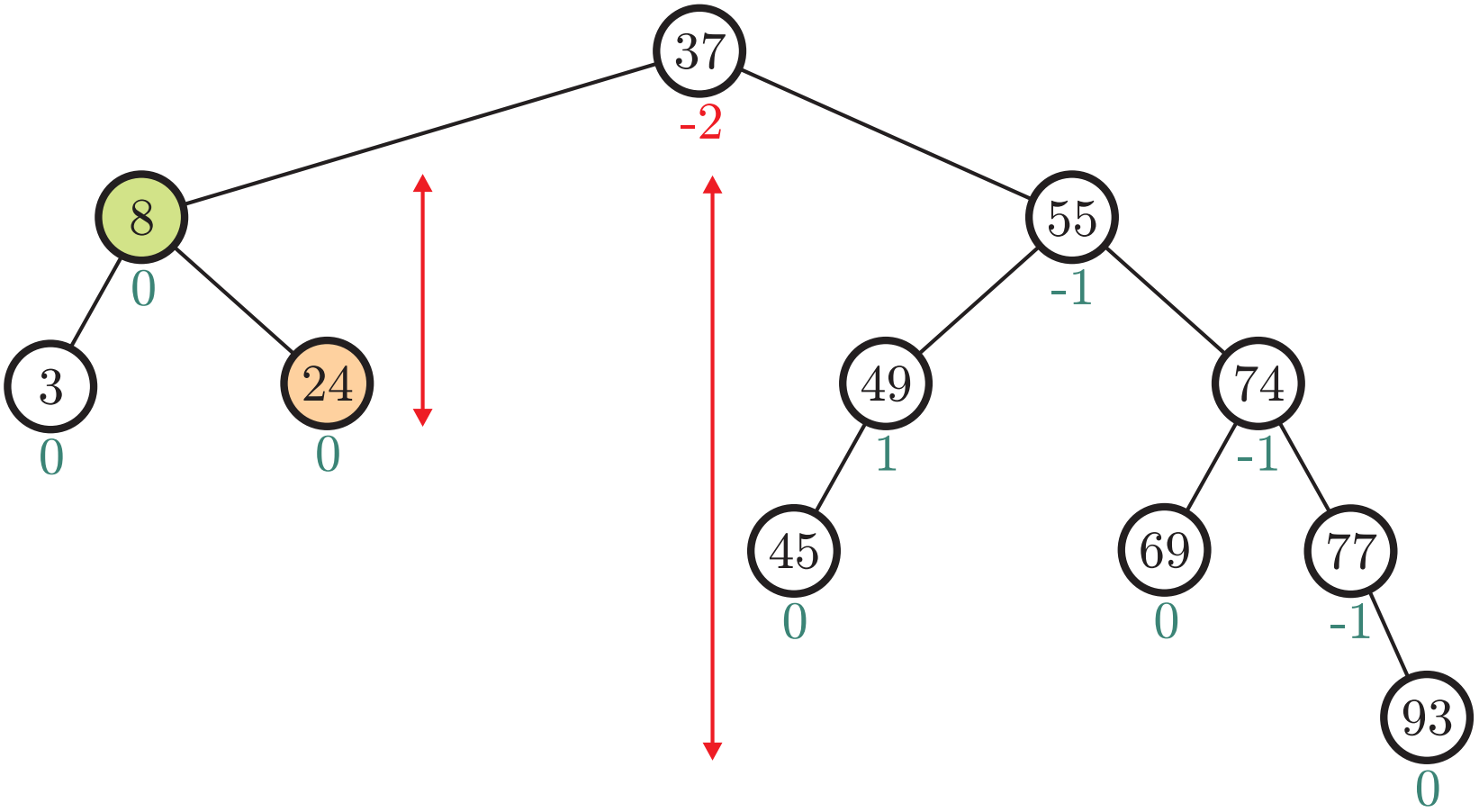
Exemple de suppression

Jusqu'à h rotations peuvent être nécessaires



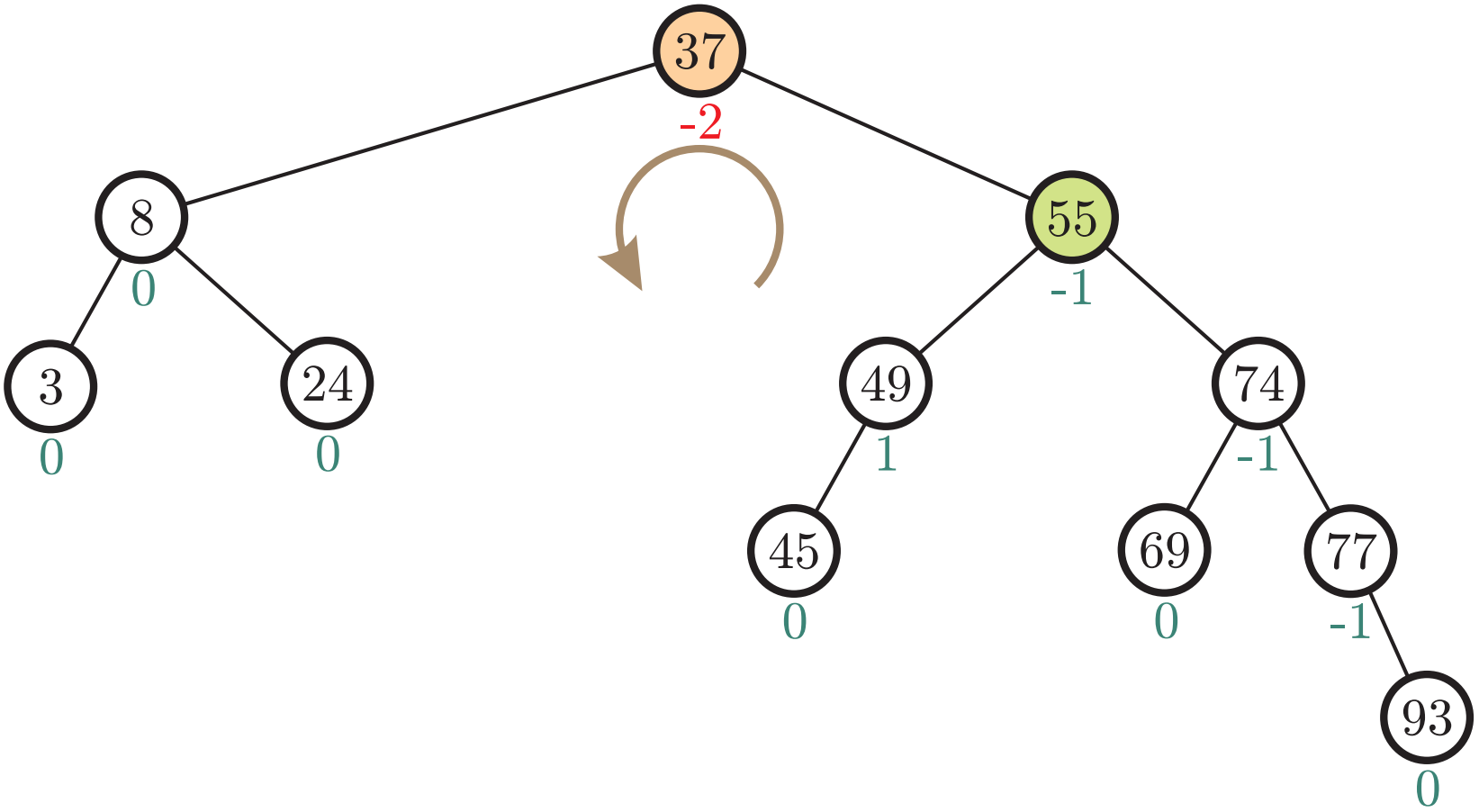
Exemple de suppression

Jusqu'à h rotations peuvent être nécessaires



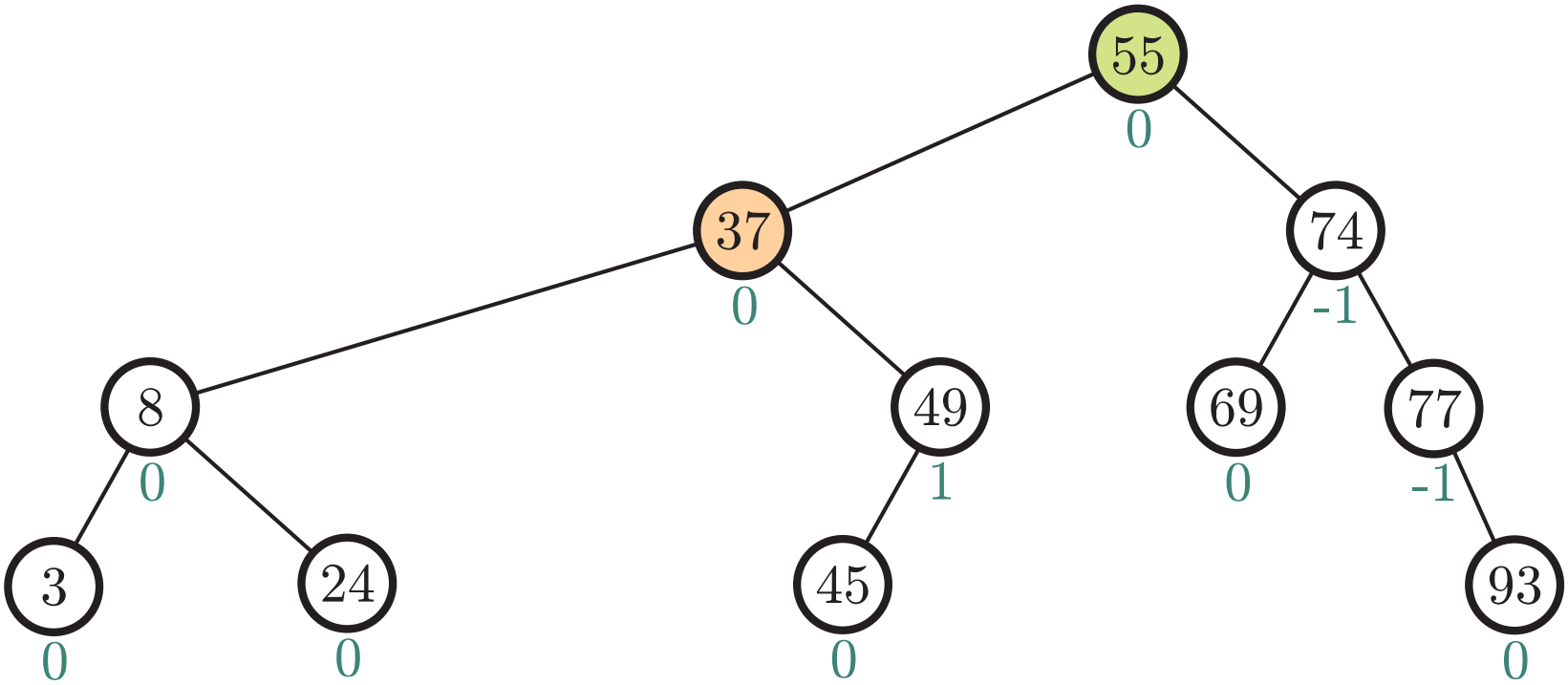
Exemple de suppression

Jusqu'à h rotations peuvent être nécessaires



Exemple de suppression

Jusqu'à h rotations peuvent être nécessaires

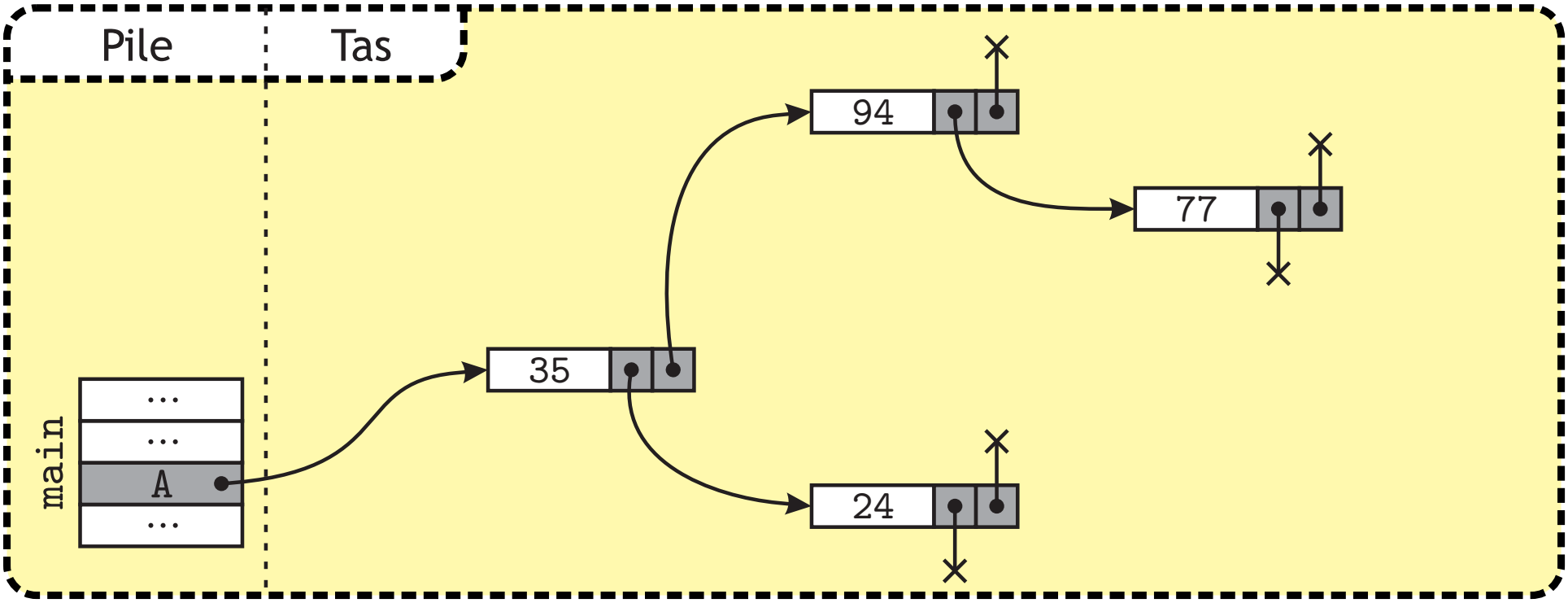


Implémentation en C

La rotation

Mauvaise façon de faire

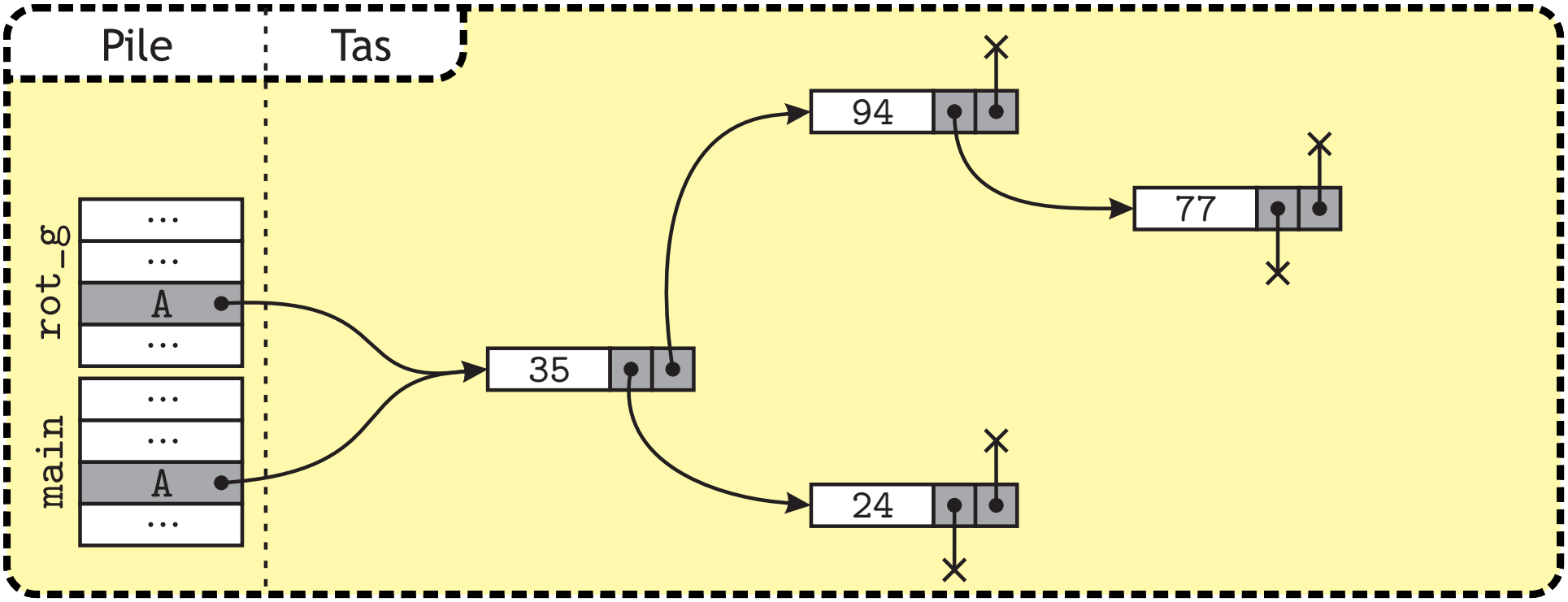
```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....
4   rot_g(A);
5 }
```



La rotation

Mauvaise façon de faire

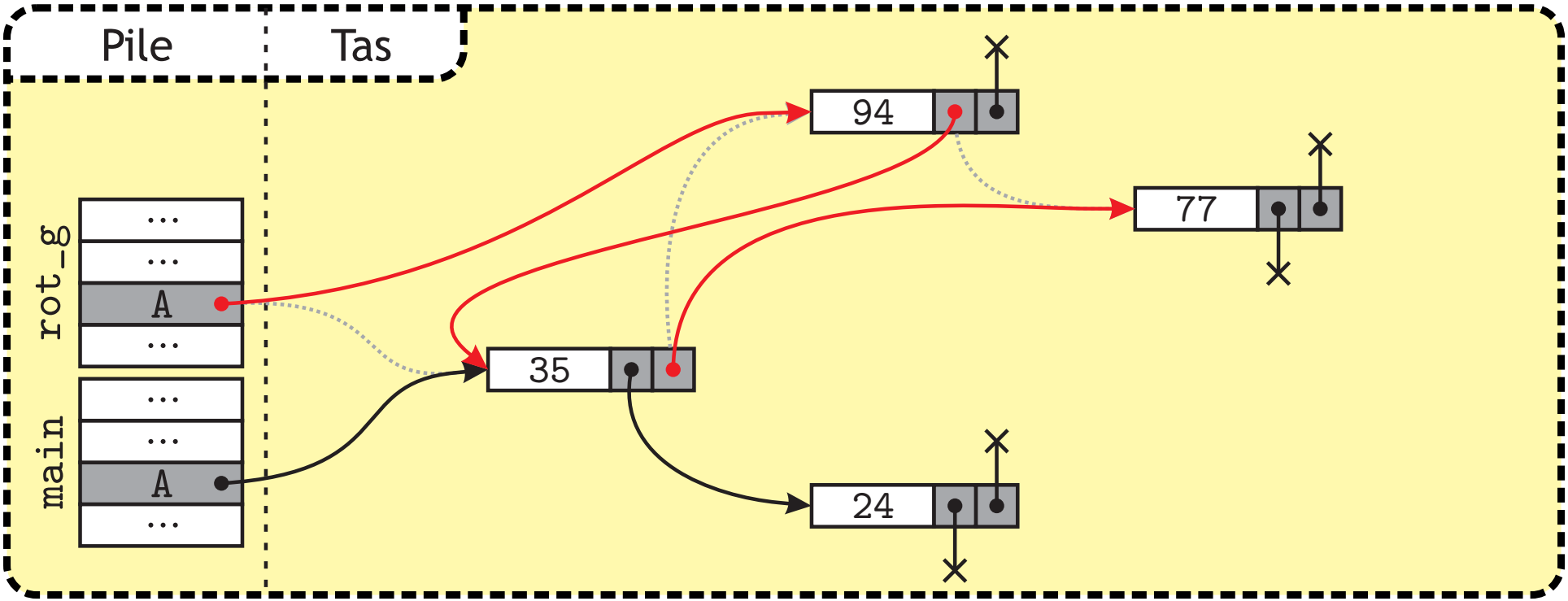
```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....
4   rot_g(A);
5 }
```



La rotation

Mauvaise façon de faire

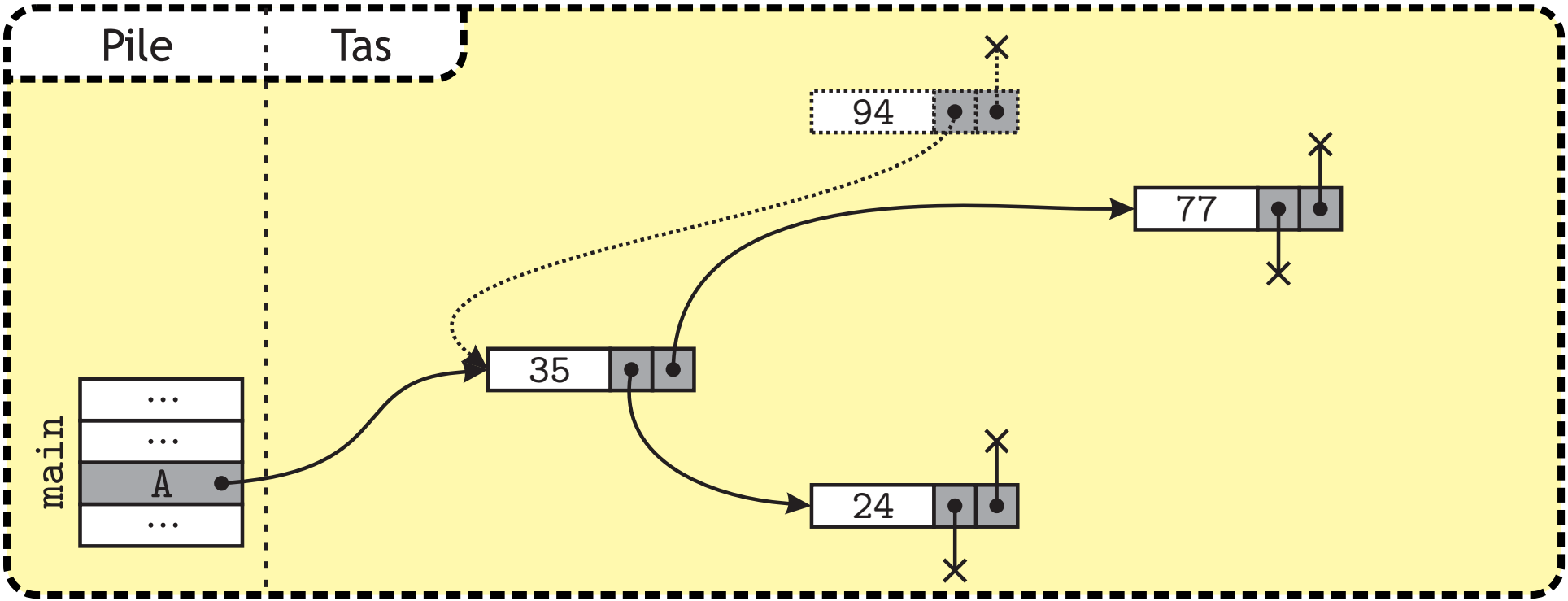
```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....
4   rot_g(A);
5 }
```



La rotation

Mauvaise façon de faire

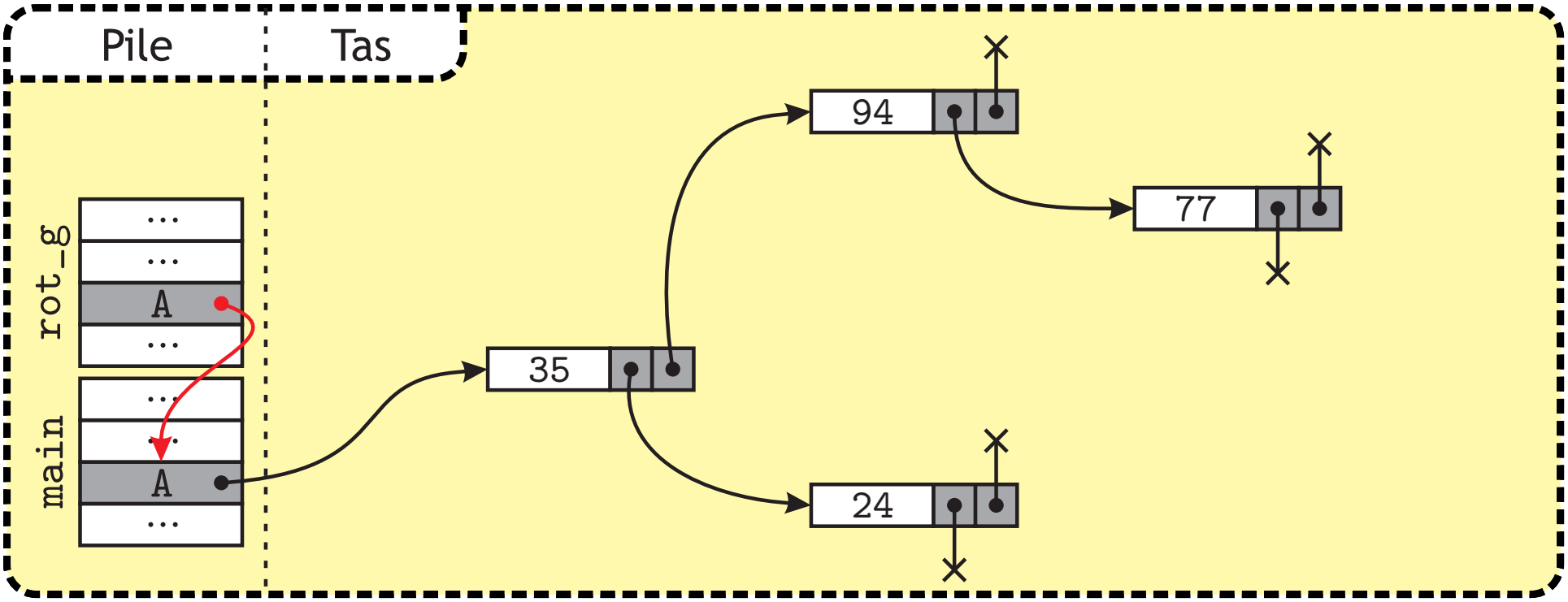
```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....
4   rot_g(A);
5 }
```



La rotation

Bonne façon de faire

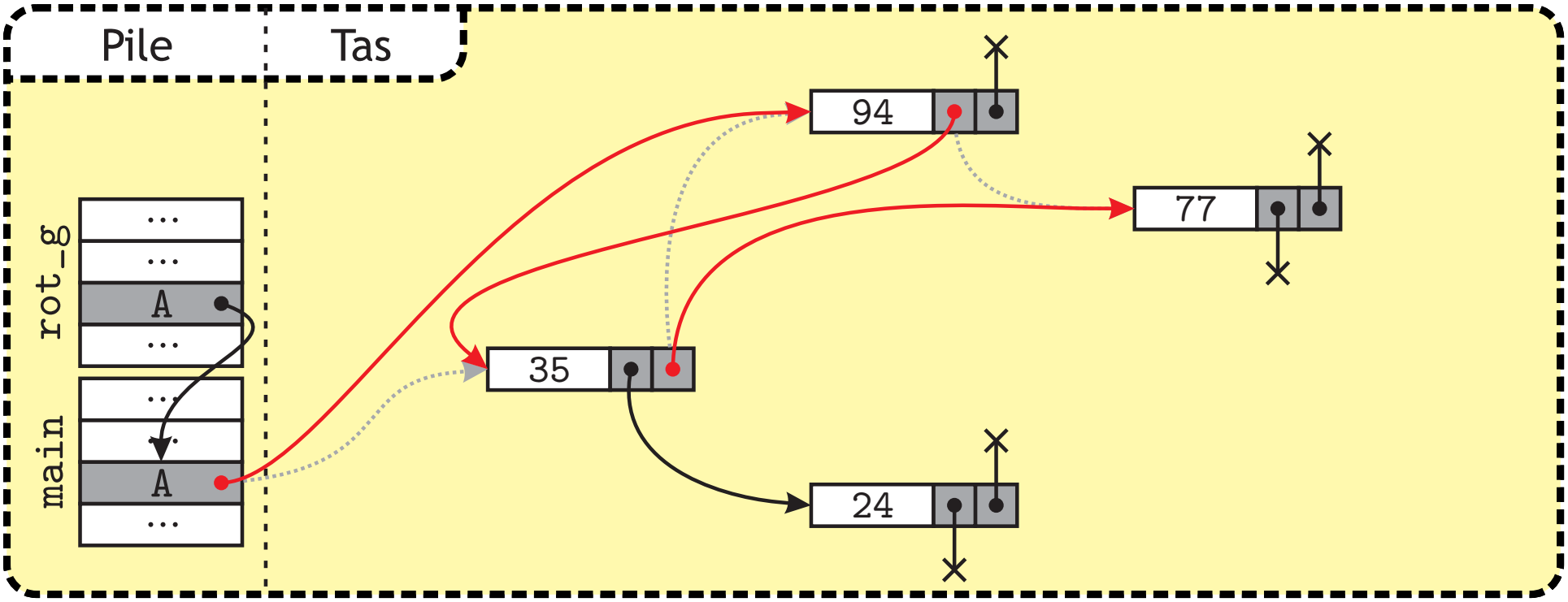
```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....              // rot_g prend un node** en argument
4   rot_g(&A);        // A du main et (*A) de rot_g sont
5 }                   // la même case mémoire.
```



La rotation

Bonne façon de faire

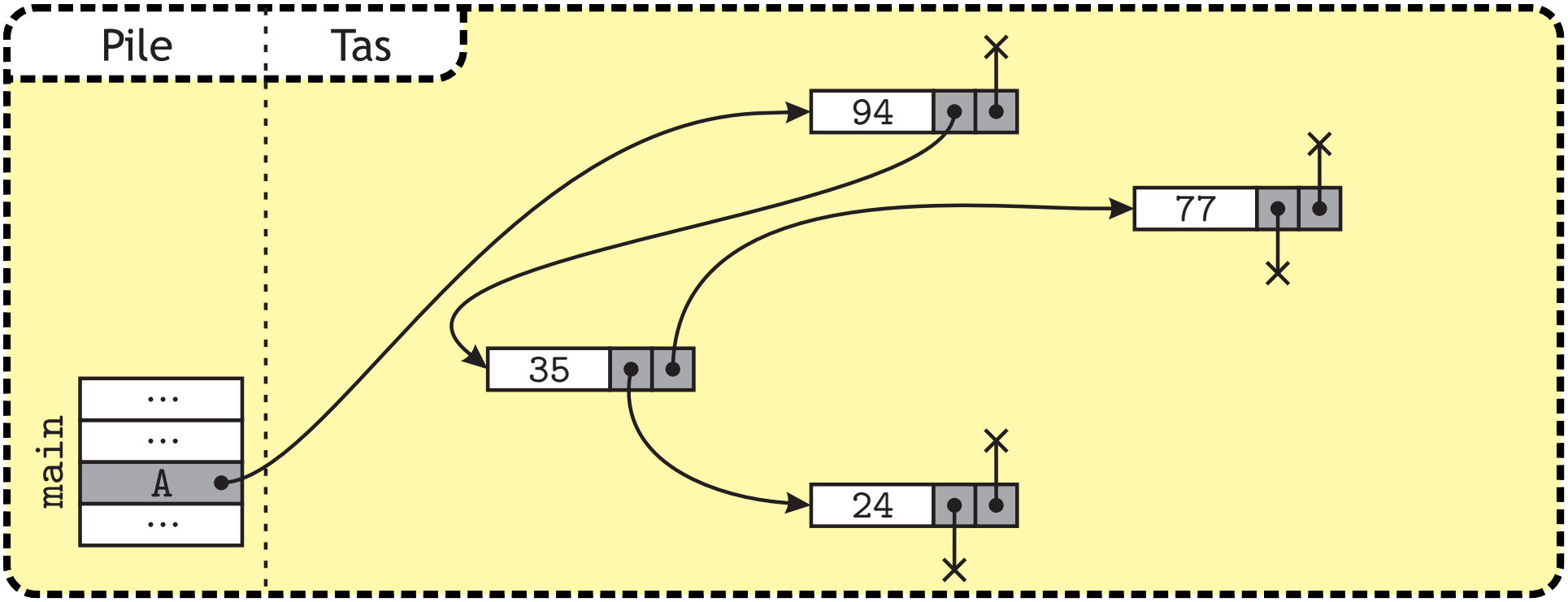
```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....              // rot_g prend un node** en argument
4   rot_g(&A);        // A du main et (*A) de rot_g sont
5 }                   // la même case mémoire.
```



La rotation

Bonne façon de faire

```
1 int main() {
2   node* A = (node*) malloc(sizeof(node);
3   ....              // rot_g prend un node** en argument
4   rot_g(&A);        // A du main et (*A) de rot_g sont
5 }                   // la même case mémoire.
```



La rotation

Bonne façon de faire

- Dans la fonction `rot_g` on travaille toujours avec `(*A)`.
  - la dernière instruction modifie la racine de l'arbre,
  - la variable locale `A` du `main` est aussi modifiée.

```
1 void rot_g(node** A) {
2   node* tmp;
3   if (((*A) != NULL) && ((*A)->fd != NULL)) {
4     tmp = (*A)->fd;
5     (*A)->fd = tmp->fg;
6     tmp->fg = (*A);
7     (*A) = tmp;
8   }
9 }
```

L'insertion dans un ABR

On utilise la même technique

- En général, une insertion ne change pas la racine,
  - sauf pour un arbre vide...
- On veut une seule fonction pour tout faire :
  - cela permet d'avoir un `main` très propre.

```
1 int main() {
2   node* A = NULL;
3   insert(12,&A);
4   insert(16,&A);
5   insert(5,&A);
6   insert(2,&A);
7 }
```

L'insertion dans un ABR

On utilise la même technique

- Une fois encore, on utilise tout le temps (*A).

```
1  void insert(int v, node** A) {
2    if ((*A) == NULL) {
3      node* n = (node*) malloc(sizeof(node));
4      n->key = v;
5      n->left = NULL;
6      n->right = NULL;
7      (*A) = n;
8      return;
9    }
10   if (v < (*A)->key) {
11     insert(v, &((*A)->left));
12   } else {
13     insert(v, &((*A)->right));
14   }
15 }
```

Ce qu'il faut retenir de ce cours

- Les arbres sont une structure très utile/utilisée en informatique
  - en général, un arbre équilibré est toujours plus efficace
    → un petit peu plus lourd à gérer, mais garantit l'efficacité.
  - les arbres AVL sont des ABR équilibrés faciles à implémenter
    → il suffit de savoir faire des rotations.

- Les tas sont un exemple un peu à part :
  - ce ne sont pas des ABR,
  - permettent de gérer une file de priorité,
  - utilisés comme structure de base dans beaucoup d'algorithmes
    → un peu comme les piles/files.